Différentes approches de la théorie l-adique du corps des classes.

Stephanie Reglade

THÈSE PRÉSENTÉE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES INFORMATIQUE
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES PURES

Par Stéphanie RÉGLADE

DIFFÉRENTES APPROCHES DE LA THÉORIE ℓ-ADIQUE DU CORPS DES CLASSES

Sous la direction de :Jean-François Jaulent

Soutenue le lundi 8 septembre 2014

Membres du jury :

Mme	SORIANO-GAFIUK, Florence	Professeur à l'Université de Lorraine	Présidente
M.	JAULENT, Jean-François	Professeur à l'Université de Bordeaux	Directeur
M.	MAIRE, Christian	Professeur à l'Université de Franche-Comté	Rapporteur
M.	MOVAHHEDI, Chazad	Professeur à l'Université de Limoges	Rapporteur
M.	ANGLÈS, Bruno	Professeur à l'Université de Caen	Examinateur
M.	BELABAS, Karim	Professeur à l'Université de Bordeaux	Examinateur

Titre : Différentes approches de la théorie ℓ-adique du corps des classes

Résumé :

Neukirch a développé la théorie abstraite du corps des classes dans son livre ``Class Field Theory''. Nous montrons qu'il est possible de déduire la théorie ℓ-adique de Jaulent du travail de Neukirch. La preuve nécessite, dans les deux cas (le cas local et le cas global) de définir les applications degré, les G-modules, valuations convenables et de prouver l'axiome du corps des classes. } Puis nous montrons qu'en considérant le même objet local, mais cette fois-ci muni de la valuation logarithmique, et en remplaçant l'extension maximale non ramifiée du corps local considéré par la $\mathbb{Z}_{\ell}$-extension cyclotomique, la théorie de Neukirch s'applique également, permettant ainsi de définir un symbole local logarithmique et un symbole global.

Nous sommes alors en mesure de définir le Frobenius logarithmique associé à une place $\mathfrak{p}$ logarithmiquement non ramifiée, ce qui conduit naturellement à une application d'Artin logarithmique, dont nous étudions le noyau et les propriétés. Cela nécessite au préalable de définir le conducteur logarithmique associé à une ℓ-extension abélienne finie. Nous introduisons alors les sous-modules de congruences logarithmiques, pour lesquels nous définissons le conducteur logarithmique associé à une classe d'équivalence sur ces modules. Nous prouvons l'égalité entre le conducteur logarithmique global d'une ℓ-extension et le conducteur de la classe de congruences qui lui est associé.

Mots clés : théorie du corps des classes, théorie ℓ-adique du corps des classes, corps des classes de rayon logarithmique

Title : Different approaches of ℓ-afic class field theory

Abstract :

Neukirch developed abstract class field theory in his famous book ``Class Field Theory''. We show that it is possible to derive Jaulent's ℓ-adic class field from Neukirch's framework. The proof requires in both cases (local case and global case) to define suitable degree maps, G-modules, valuations and to prove the class field axiom. Then we study the local object

endowed with the logarithmic valuation introduced by Jaulent and we replace here the maximal, abelian unramified pro-ℓ-extension of our local field by the ${\mathbb{Z}_{\ell}}$-cyclotomic one, and the usual valuation by the logarithmic one.

We show that Neukich's abstract theory applies in this context, and allows to define a logarithmic local symbol and a global one. This allows to define the logarithmic Frobenius, in the context of the logarithmic ramification, and the logarithmic Artin map. We study its properties and its kernel.

This requires before to define the logarithmic conductor. Then we introduce logarithmic congruences sub-modules, and the conductor attached to the coset of such a module. We prove that both conductors coincide.

Keywords : class field theory, ℓ-adic class field theory , logarithmic ray class field

---

Institut de mathématiques de Bordeaux
UMR 5251
351, cours de la Libération
F 33405 Talence cedex

Remerciements

Ma reconnaissance va spontanément à Monsieur Jaulent, mon directeur de thèse, pour sa disponibilité, son écoute et ses précieux conseils.

Je remercie Monsieur Maire et Monsieur Movahhedi pour leurs remarques avisées et pour avoir accepté d'être rapporteurs et membres du jury.

Je remercie également Monsieur Belabas pour l'intêret qu'il a porté à mon travail et l'honneur qu'il me fait ainsi que Madame Soriano-Gafiuk et Monsieur Anglès d'être membres du jury.

Je remercie chaleureusement Monsieur Martinet pour son soutien tout au long de ma thèse.

Ma gratitude s'adresse aussi à Monsieur Bilu, Monsieur Erez, Monsieur Kupin, Monsieur Matignon, Monsieur Ruch, Monsieur Thiery, Monsieur Yger et naturellement à tous ceux qui m'ont transmis l'amour des mathématiques.

Table des matières

1 Introduction

Le cadre de ce travail est celui des ℓ-extensions abéliennes d'un corps de nombres ou d'une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, où ℓ désigne un nombre premier fixé.

Le point de départ de cette thèse est le travail de Jean-François Jaulent sur la théorie ℓ-adique du corps des classes. L'exposé fondateur de sa théorie est le premier chapitre de sa thèse sur l'arithmétique des ℓ-extensions [Ja0, Chap.1]. Cela a ensuite fait l'objet d'une publication [Ja1].

Les objets que nous étudions sont les $\mathbb{Z}_\ell$-modules fondamentaux construits par Jaulent.

-Dans le cas local, pour chaque place $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres, le ℓ-adifié du groupe multiplicatif du complété d'un corps de nombres noté $K_\mathfrak{p}^\times$ est défini comme limite projective :

$$\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} = \varprojlim_k K_\mathfrak{p}^\times \big/ K_\mathfrak{p}^{\times \ell^k}$$

-dans le cas global, le ℓ-groupe des idèles principaux est défini comme tensorisé :

$$\mathcal{R}_K = (\mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times)$$

le ℓ-groupe des idèles d'un corps de nombres est alors le produit :

$$\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K}^{res} (\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}})$$

et le ℓ-groupe des classes d'idèles est :

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K.$$

La cohomologie que nous utilisons est la cohomologie classique comme rappelé dans le préliminaire.

Le but de la première partie de cette thèse est de montrer que la théorie ℓ-adique du corps des classes peut être déduite de la théorie abstraite du corps des classes, développée par Neukirch dans [Ne1].

Le contexte de Neukirch est celui d'une théorie de Galois abstraite avec pour point de départ un groupe G abstrait, profini. Cette théorie abstraite, rappelée dans la deuxième partie, repose sur l'existence de deux morphismes fondamentaux : le degré et la valuation et sur l'axiome du corps des classes : condition cohomologique sur le G-module A que l'on étudie.

Il s'agit donc, dans le contexte de la théorie ℓ-adique, de construire ces morphismes fondamentaux, d'en vérifier les propriétés, dans le cas local tout comme dans le cas global, puis d'établir dans chaque cas l'axiome du corps des classes : résultat principal du cas local, et du cas global :

Théorème. *Pour toute ℓ-extension cyclique $L_\mathfrak{P}$ d'un corps local $K_\mathfrak{p}$ nous avons :*

$$|H^i(G(L_\mathfrak{P}/K_p), \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}})| = \begin{cases} [L_\mathfrak{P} : K_p] & \textit{pour } i = 0 \\ 1 & \textit{pour } i = 1 \end{cases}$$

Théorème. *Soit L/K une ℓ-extension cyclique d'un corps de nombres, alors nous avons :*

$$|H^i(G(L/K),\mathcal{C}_L)| = \begin{cases} [L:K] & \textit{pour } i=0 \\ 1 & \textit{pour } i=1 \end{cases}$$

Ainsi nous obtenons une nouvelle preuve des théorèmes fondamentaux de la théorie ℓ-adique :

Théorème. *La correspondance 1-1 dans le cas local*
L'application

$$L_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathcal{N}_L = N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$$

établit une correspondance bijective entre les ℓ-extensions abéliennes finies $L_{\mathfrak{P}}$ de $K_{\mathfrak{p}}$ et les sous-modules fermés d'indice fini $\mathcal{N}$ de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$. Si $L_{\mathfrak{P}}$ est associé au sous-module $\mathcal{N}_L$ de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ alors $L_{\mathfrak{P}}$ est appelé le corps des classes de $\mathcal{N}_L$ et nous avons :

$$\mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}/N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}.$$

De plus, l'implication $L_1 \subset L_2 \Rightarrow \mathcal{N}_{L_2} \subset \mathcal{N}_{L_1}$ donne $\mathcal{N}_{L_1L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$ et
$\mathcal{N}_{L_1\cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1}\mathcal{N}_{L_2}$.

Théorème. *La correspondance 1-1 dans le cas global*
L'application

$$L \longrightarrow \mathcal{N}_L = N_{L/K}\mathcal{C}_L$$

établit une correspondance bijective entre les ℓ-extensions abéliennes finies L/K et les sous-groupes ouverts $\mathcal{N}$ de $\mathcal{C}_K$. Si L est associé au sous-groupe ouvert $\mathcal{N}_L$ de $\mathcal{C}_K$ alors L est appelé le corps des classes de $\mathcal{N}_L$ et nous avons :

$$Gal(L/K) \simeq \mathcal{C}_K/N_{L/K}\mathcal{C}_L$$

De plus, l'implication $L_1 \subset L_2 \Rightarrow \mathcal{N}_{L_2} \subset \mathcal{N}_{L_1}$ donne $\mathcal{N}_{L_1L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$ et
$\mathcal{N}_{L_1\cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1}\mathcal{N}_{L_2}$.

La deuxième partie de cette thèse repose sur une l'observation suivante : soit L/K une extension de corps de nombres, $\mathfrak{p}$ une place de K logarithmiquement non ramifiée dans L i.e, selon la définition posée par Jaulent dans [Ja2], vérifiant :

$$L_{\mathfrak{P}} \subseteq \hat{K}_{\mathfrak{p}}^c$$

où $\hat{K}_{\mathfrak{p}}^c$ désigne la $\hat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique de $K_{\mathfrak{p}}$. Alors son sous-groupe de décomposition est cyclique.
D'où la question naturelle : pouvons nous dans ce contexte, mettre en évidence un générateur particulier de ce sous-groupe de décomposition, qui jouerait le rôle dans le cas logarithmique, du Frobenius classique ?

Pour cela, dans cette deuxième partie, nous considérons le même objet local que précédemment, à savoir, le ℓ-adifié du groupe multiplicatif d'un corps local. Cette fois-ci, nous le munissons de la valuation logarithmique introduite par Jaulent, dont nous rappelons la construction. Le choix du dénominateur dans l'expression de cette valuation logarithmique impose l'uniformisante logarithmique sur $\mathbb{Q}_\ell$. Et nous modifions également l'application

degré. De façon générale, pour un corps local $K_{\mathfrak{p}}$, nous remplaçons aussi sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension non ramifiée par sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique, et la valuation usuelle de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ par la valuation logarithmique : les différences par rapport au contexte local précédent vont donc apparaitre seulement pour les places au dessus de ℓ.
Le but est de de montrer que le contexte logarithmique peut aussi être compris grâce à la théorie abstraite de Neukirch. Ainsi nous sommes en mesure de définir pour une ℓ-extension locale un symbole local logarithmique qui ne diffère du symbole local ℓ-adique que pour les places $\mathfrak{p}$ au dessus de ℓ. L'intérêt réside dans le fait que nous pouvons alors définir un Frobenius logarithmique dans le contexte de la non-ramification logarithmique : ce dernier coïncide avec le Frobenius classique sauf pour les places au dessus de ℓ : cela permet donc d'étendre la théorie à des places $\mathfrak{p}$ au dessus de ℓ, ramifiées au sens classique, mais non ramifiées au sens logarithmique. Nous obtenons l'expression suivante pour ce dernier sur $\mathbb{Q}_p$:

Proposition : *Soit ζ une racine de l'unité d'ordre une puissance de ℓ, et $a \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$, alors $(a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p)_\ell)(\zeta) = \zeta^{n_p}$ avec*

$$n_p = \begin{cases} p^{v_p(a)} & \text{pour } p \neq \ell \text{ et } p \neq \infty \\ (\tilde{\ell})^{-\tilde{v}_\ell(a)} & \text{pour } p = \ell \\ sgn(a) & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

où $(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell$ dénote la projection sur le ℓ- sous-groupe de Sylow de Gal$(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$, où $\tilde{\ell}$ désigne l'uniformisante logarithmique imposée par le choix de la normalisation de la valuation logarithmique.

D'autre part la définition du Frobenius logarithmique associé à une place $\mathfrak{p}$, d'un corps de nombres K, logarithmiquement non ramifiée dans une extension abélienne donnée L/K, conduit à définir une application d'Artin logarithmique sur l'ensemble des diviseurs logarithmiques.

Définition *Soit L/K une ℓ-extension abélienne finie. Soit $\mathfrak{p}$ une place de K logarithmiquement non ramifiée dans L. Soit $D\ell_K$ le groupe des diviseurs logarithmiques de K. Soit $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ le conducteur logarithmique global de de L/K , et $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ les diviseurs logarithmiques premiers à δ_K. Nous définissons l'application suivante pour une place $\mathfrak{p}$:*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{(\frac{L/K}{\quad})} : D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}} & \to & \mathrm{Gal}(L/K) \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \widetilde{(\frac{L/K}{\mathfrak{p}})} \end{array}$$

où le Frobenius logarithmique est

$$\widetilde{(\frac{L/K}{\mathfrak{p}})} = ([\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}], L/K)$$

avec $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}$ l'uniformisante logarithmique, définie préalablement et $[\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}]$ l'image de $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{J}_K$. Nous étendons alors cette application, par multiplicativité au $\mathbb{Z}_\ell$-module des diviseurs logarithmiques de K premiers au conducteur logarithmique global de l'extension, que nous avons préalablement défini $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. Cette application est alors appelée application d'Artin logarithmique.

Nous en étudions les premières propriétés et explicitons son noyau appelé sous-module d'Artin logarithmique, noté $A\ell_{L/K}$.

Dans la troisième partie, nous développons une approche type corps des classes de rayon de la théorie logarithmique. Nous définissons les sous-modules de congruences, analogues logarithmiques des sous-groupes de congruences. Cela conduit au théorème de correspondance suivant :

Théorème. *L'application, qui à une ℓ-extension abélienne L de K associe le groupe de congruences $(\widetilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$, est une application de l'ensemble des ℓ-extensions abéliennes de degré fini de K dans celui des classes de congruences de K, qui a les propriétés suivantes (L,L' désignant des ℓ-extensions abéliennes de K)*

i) *elle est bijective*
ii) $L \subset L'$ équivaut à $\mathcal{C}_{L'} \subset \mathcal{C}_L$,
iii) $\mathcal{C}_{LL'} = \mathcal{C}_L \cap \mathcal{C}_{L'}$
iv) $\mathcal{C}_{L\cap L'} = \mathcal{C}_L \mathcal{C}_{L'}$
v) *pour toute extension K' de K, on a $\mathcal{C}_{KK'/K} = N^{-1}_{K'/K}\mathcal{C}_{K'}$; en particulier si $K \subset K' \subset L$, alors $\mathcal{C}_{L/K'} = N^{-1}_{K'}\mathcal{C}_L$.*

Nous introduisons par la suite le symbole de Hasse logarithmique, grâce auquel nous établissons l'égalité entre le conducteur logarithmique global d'une ℓ-extension et le conducteur de la classe de congruences qui lui est associé.

Théorème *Soit L une ℓ-extension abélienne finie de K corps de classes pour la classe $\mathcal{C}$ du groupe de congruences, alors le conducteur de la classe de congruences $\widetilde{\mathfrak{f}}_{\mathcal{C}}$ est égal au conducteur logarithmique de l'extension $\widetilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$.*

2 Approche formelle à la Neukirch de la théorie ℓ-adique du corps des classes

2.1 Préliminaires

LES OBJETS, que nous allons étudier, sont naturellement munis d'une structure de $\mathbb{Z}_\ell$-module. Ils sont, comme nous le rappellerons, obtenus par ℓ-adification. C'est pourquoi nous introduisons la cohomologie suivante pour les $\mathbb{Z}_\ell$-modules : elle correspond à la cohomologie classique. Dans la deuxième partie, nous rappelons les points clefs de la théorie abstraite de Neukirch.

2.1.1 La $\mathbb{Z}_\ell$-cohomologie

Définition 1. *Soit $F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0$ une résolution projective de $\mathbb{Z}_\ell[G]$-modules, où G est un ℓ-groupe. Soit A un G-module, en appliquant le foncteur $Hom_G(.,\mathbb{Z}_\ell \otimes A)$ nous obtenons :*

$$0 \longrightarrow Hom_G(\mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \longrightarrow Hom_G(F_0, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \longrightarrow Hom_G(F_1, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow Hom_G(F_{n-1}, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \xrightarrow{\delta'_{n-1}} Hom_G(F_n, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \xrightarrow{\delta'_n} Hom_G(F_{n+1}, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) \cdots$$

Nous notons

$$H^n_\ell(G, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) := Ker\delta'_n / Im\delta'_{n-1}$$

.

Théorème 2.1.1. *Si G est un ℓ-groupe, et A un G-module alors :*

$$H^i_\ell(G, \mathbb{Z}_\ell \otimes A) = \mathbb{Z}_\ell \otimes H^i(G, A)$$

Démonstration. Le point de départ est une résolution projective de $\mathbb{Z}[G]$-modules libres, F_i :

$$F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

i)En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_G(., A)$ nous obtenons :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(F_{n-1}, A) \xrightarrow{\delta_{n-1}} \mathrm{Hom}_G(F_n, A) \xrightarrow{\delta_n} \mathrm{Hom}_G(F_{n+1}, A) \longrightarrow \cdots$$

et

$$\mathrm{H}^n(G, A) := \mathrm{Ker}\delta_n / \mathrm{Im}\delta_{n-1}.$$

ii)Puisque $\mathbb{Z}_\ell$ est un module plat, nous obtenons :

$$\mathbb{Z}_\ell \otimes F_n \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \otimes F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \otimes F_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0.$$

En appliquant maintenant le foncteur $\mathrm{Hom}_G(.,\mathbb{Z}_\ell\otimes A)$ nous avons :

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}_\ell,\mathbb{Z}_\ell\otimes A)\longrightarrow\cdots\longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}_\ell\otimes F_{n-1},\mathbb{Z}_\ell\otimes A)\xrightarrow{\delta'_{n-1}}\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}_\ell\otimes F_n,\mathbb{Z}_\ell\otimes A)\xrightarrow{\delta'_n}\cdots$$

et

$$\mathrm{H}^n_\ell(G,\mathbb{Z}_\ell\otimes A):=\mathrm{Ker}\delta'_n/\mathrm{Im}\delta'_{n-1}.$$

iii) Montrons alors que $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}_\ell\otimes F_i,\mathbb{Z}_\ell\otimes A)=\mathbb{Z}_\ell\otimes\mathrm{Hom}_G(G,A)$.

Les F_i sont des $\mathbb{Z}[G]$-modules libres, en utilisant l'additivité de foncteur $\mathrm{Hom}_G(.,A)$ il suffit donc de vérifier la propriété sur $\mathbb{Z}[G]$. Mais

$$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],A)\simeq A\quad\text{et}\quad\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}_\ell[G],\mathbb{Z}_\ell\otimes A)\simeq\mathbb{Z}_\ell\otimes A.$$

iv) Montrons alors les deux propriétés suivantes :

$\mathrm{Ker}\delta'_n=\mathbb{Z}_\ell\otimes\mathrm{Ker}\delta_n\quad$ et $\quad\mathrm{Im}\delta'_{n-1}=\mathbb{Z}_\ell\otimes\mathrm{Im}\delta_{n-1}$.

Étant donné une application $\mathbb{Z}$-linéaire $u:\ M\longrightarrow N$ et son application correspondante $u':\mathbb{Z}_\ell\otimes M\longrightarrow\mathbb{Z}_\ell\otimes N$; nous avons, toujours par la platitude de $\mathbb{Z}_\ell$, la suite exacte :

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}_\ell\otimes\mathrm{Ker}(u)\longrightarrow\mathbb{Z}_\ell\otimes M\longrightarrow\mathbb{Z}_\ell\otimes\mathrm{Im}(u)\longrightarrow 0.$$

Comme $\mathrm{Im}(u)\subset N$ nous en déduisons que $\mathbb{Z}_\ell\otimes\mathrm{Im}(u)\subset\mathbb{Z}_\ell\otimes N$, toujours à cause de la platitude de $\mathbb{Z}_\ell$. Il suit $\mathrm{Im}(u')=\mathbb{Z}_\ell\otimes\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u')=\mathbb{Z}_\ell\otimes\mathrm{Ker}(u)$. Finalement,

$$\mathrm{Ker}\delta'_n/\mathrm{Im}\delta'_{n-1}\simeq\mathbb{Z}_\ell\otimes(\mathrm{Ker}\delta_n/\mathrm{Im}\delta_{n-1}).$$

□

Corollaire 1. *La cohomologie préalablement définie correspond à la cohomologie classique.*

Démonstration. D'après [Se1, corollaire 1 p. 138], ℓ^n étant l'ordre du ℓ-groupe G, les $H^i(G,A)$ sont annulés par ℓ^n. Ainsi nous avons :

$$H^i_\ell(G,A)=\mathbb{Z}_\ell\otimes H^i(G,A)=\mathbb{Z}_\ell\otimes_{\mathbb{Z}}\frac{H^i(G,A)}{\ell^nH^i(G,A)}=\frac{\mathbb{Z}_\ell}{\ell^n\mathbb{Z}_\ell}\otimes H^i(G,A)=\frac{\mathbb{Z}}{\ell^n\mathbb{Z}}\otimes H^i(G,A)$$

$$H^i_\ell(G,A)=\frac{\mathbb{Z}}{\ell^n\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}H^i(G,A)=\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\frac{H^i(G,A)}{\ell^nH^i(G,A)}=\frac{H^i(G,A)}{\ell^nH^i(G,A)}=H^i(G,A)$$

□

2.1.2 La théorie abstraite de Neukirch

Nous rappelons dans cette section les points clefs de la théorie abstraite de Neukirch. Nous renvoyons à [Ne3, p. 2] pour les définitions de base, et à [Ne1, p. 18 p. 32] pour les preuves détaillées.

Nous considérons le contexte général suivant : G est un groupe abstrait profini, dont les sous-groupes fermés sont notés par G_K, ces indices K sont appelés des "corps". G est équipé d'un homomorphisme continu et surjectif : le degré deg : $G \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$.

1. Le noyau du degré est un sous-groupe fermé noté $G_{\tilde{k}}$ associé au corps $\tilde{k}$.
2. Nous notons par k le corps tel que $G_k = G$.
3. Nous notons par $\bar{k}$ le corps tel que $G_{\bar{k}} = \{1\}$.
4. Si $G_L \subset G_K$, nous écrivons $K \subset L$.
5. L/K est finie si G_L est ouvert (fermé d'indice fini) dans G_K ; le degré $[L : K]$ est alors défini par $[L : K] = (G_K : G_L)$.
6. Nous écrivons $K = \prod K_i$ pour $G_K = \cap_i G_{K_i}$.
7. Nous écrivons $K = \cap K_i$ si G_K est topologiquement généré par les G_{K_i}.
8. Si G_L est un sous-groupe normal de G_K nous disons que L/K est *extension Galoisienne* et nous écrivons $\mathrm{Gal}(L/K) := G_K/G_L$.
9. Le noyau de l'application deg est un sous-groupe fermé de G noté $G_{\tilde{k}}$. Comme l'application degré est par hypothèse surjective, nous avons $G/G_{\tilde{k}} \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$.
10. Si K est une extension finie de k nous définissons $\widetilde{K} = K \cdot \tilde{k}$.
11. Nous pouvons alors restreindre l'application deg à G_K et ainsi définir pour toute extension finie K :

$$f_K = [K \cap \widetilde{k} : k] \qquad e_K = [K : K \cap \widetilde{k}].$$

appelés respectivement degré d'inertie et indice de ramification abstraits. Cela donne lieu au schéma de la ramification suivante :

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
\bar{k} \arrow[d] & \\
\widetilde{k} \cap K \arrow[r, "e_K"] \arrow[d, "f_K"] & K \\
k &
\end{tikzcd}$$

Si L/K est une extension finie, nous posons :

$$f_{L/K} = [L \cap \widetilde{K} : L] \qquad e_{L/K} = [L : L \cap \widetilde{K}].$$

appelés respectivement degré d'inertie et indice de ramification relatifs abstraits. Ils satisfont les relations suivantes :

$$f_{L/K} = f_L/f_K \qquad [L : K] = e_{L/K} \cdot f_{L/K}.$$

Finalement, l' homomorphisme deg est utile :

1-pour définir le degré d'inertie abstrait, ainsi l'application deg induit un homomorphisme surjectif

$$\deg_K : G_K \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$$

defini par $\deg_K = \frac{1}{f_K} \cdot$ deg , et dont le noyau est $G_{\tilde{K}}$ $(\tilde{K} = K.\tilde{k})$

2-pour définir **le Frobenius générique de** K : l'élément $\psi_K \in \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ qui vérifie $\deg_K(\psi_K) = 1$ est le Frobenius de K .

Neukirch introduit alors la notion de **relèvement du Frobenius** : étant donné L/K une extension Galoisienne finie, nous considérons les diagrammes de corps suivants :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{K} & \text{———} & \widetilde{L} = L\widetilde{K} \\ | & & | \\ K & \text{———} & L \end{array}$$

$\deg_K : G_K \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ induit un homomorphisme surjectif $\deg_K : \mathrm{Gal}(\tilde{L}/K) \longrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$ et nous définissons l'ensemble $\Phi(\tilde{L}/K) = \{\tilde{\sigma} \in \mathrm{Gal}(\tilde{L}/K)\ \deg_K(\tilde{\sigma}) \in \mathbb{N}\}$ qui est appelé l'ensemble des Frobenius de K . Le fait important est le suivant : l'application

$$\begin{gathered} \Phi(\tilde{L}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \\ \tilde{\sigma} \longmapsto \tilde{\sigma_{/L}}. \end{gathered}$$

est surjective [Ne1, proposition 1.2 p. 20]. Si $\sigma = \tilde{\sigma_L}$, $\tilde{\sigma}$ est alors qualifié de relèvement de Frobenius de σ . L'idée principale de cette notion de relèvement du Frobenius est que cela permet de voir tout élément $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ comme un Frobenius : c'est le sens de la proposition [Ne1, proposition 1.3 p. 20] : soit $\tilde{\sigma} \in \Phi(\tilde{L}/K)$ et soit Σ le corps des points fixes de $\tilde{\sigma}$, alors

i)$[\Sigma : K] \leq \infty$

ii)$f_{\Sigma/K} = \deg_K(\tilde{\sigma})$

iii)$\tilde{\Sigma} = \tilde{L}$

iv)$\tilde{\sigma} = \phi_\Sigma$

La théorie abstraite de Neukirch nécessite **un G-module et une valuation hensélienne par rapport au degré** [Ne2, p. 288]. Un G-module multiplicatif A est un groupe abélien multiplicatif muni d'une action continue à droite :

$$\begin{array}{cccc} \sigma : & A & \rightarrow & A \\ & a & \mapsto & a^\sigma \end{array}$$

i.e tel que $A = \bigcup_{[K:k]<\infty} A_K$, où $A_K := \{a \in A \mid a^\sigma = a, \forall \sigma \in G_K\} = A^{G_K}$ et où K parcourt toutes les extensions finies de k.

Cela permet de définir une nouvelle application, la norme, du G-module A_K dans A_k :

$$N_{K/k}(a) = \prod_\sigma a^\sigma$$

où σ parcourt le système représentatif de G_K/G_L.

Une valuation de $A_k = A^{G_k}$ hensélienne par rapport au degré deg : $G \to \widehat{\mathbb{Z}}$ est un homomorphisme satisfaisant les propriétés suivantes : [Ne2, p. 288]

(*i*) $v(A_k) = Z$ tel que $\mathbb{Z} \subset Z$ et $Z/n \cdot Z \simeq \mathbb{Z}/n \cdot \mathbb{Z}$ pour tout $n > 0$

(*ii*) $v(N_{K/k}A_K) = f_K.Z$ pour toutes les extensions K de k.

Le couple $(\deg, v)$ est appelé couple de corps des classes.

En fait pour tout corps K la valuation hensélienne v induit un homomorphisme, noté $v_K = \frac{1}{f_K} v \circ N_{K/k}$, d' image Z. Cette valuation permet de définir les éléments premiers : c'est un élément $\pi_K \in A_K$ tel que $v_K(\pi_K) = 1$. Nous posons $U_K = \{u \in A_K \ v_K(u) = 0\}$. Nous avons alors ce diagramme commutatif pour toute extension finie L/K :

$$\begin{tikzcd} A_L \arrow[r, "v_L"] \arrow[d, "N_{L/K}"] & \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[d, "f_{L/K}"] \\ A_K \arrow[r, "v_K"] & \widehat{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

Notons que si $f_{L/K} = [L : K]$ alors $v_L|_{A_K} = v_K$, de sorte qu'un élément premier de A_K est aussi un élément premier de A_L. Á l'opposé, si $f_{L/K} = 1$ et si π_L est un élément premier de A_L alors $\pi_K = N_{L/K}(\pi_L)$ est un élément premier de A_K.

Neukirch impose des conditions sur le G-module A pour toutes les extensions cycliques : c'est le sens de *l'axiome du corps des classes* :

Axiome : *Pour toute extension cyclique L/K, nous avons :*

$$|H^i(G(L/K), A_L)| = \begin{cases} [L:K] & \textit{pour } i = 0 \\ 1 & \textit{pour } i = -1 \end{cases}$$

Un corollaire intéressant est le suivant, valable pour les extensions finies non ramifiées :

Corollaire 2. *[Ne1, p. 22]proposition 2.2*

Soit A un G-module satisfaisant l'axiome du corps des classes, (deg, v) un couple de corps de classes, L/K une extension finie non ramifiée , ce qui signifie $e_{L/K} = 1$, alors :

$$H^i(G(L/K), U_L) = 1$$

pour $i = 0, -1$ où U_L est le noyau de v_L rattachée à L .

Dans ce contexte, Neukirch a prouvé le théorème fondamental suivant : [Ne1, p. 28] il s'agit du théorème principal de la théorie du corps des classes, appelé *la loi générale de réciprocité.*

Théorème 2.1.2. *Soit L/K une extension abélienne finie, A un G-module satisfaisant l'axiome du corps des classes, soit (deg, v) un couple de corps des classes, $\sigma \in G(L/K)$, $\tilde{\sigma} \in Gal(\tilde{L}/K)$, (qui est un relèvement de Frobenius de σ) et Σ étant le corps des points fixes de $\tilde{\sigma}$, alors l'homomorphisme*

$$\begin{aligned} r_{L/K} \colon G(L/K) &\longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L) \\ \sigma &\longmapsto N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma) \bmod N_{L/K}A_L \end{aligned}$$

est un isomorphisme, où π_Σ est un élément premier de A_Σ. Cette application est appelée application de réciprocité.

L'un des principes fondamentaux de la théorie du corps des classes est le suivant : l'application de réciprocité fait correspondre les éléments de Frobenius et les éléments premiers. Ce principe s'exprime comme suit :

Théorème 2.1.3. *[Ne1, p. 25]théorème 2.6, principe fondamental de Neukirch :*

Si L/K est une sous-extension finie de $\tilde{K}/K$ alors l'application de réciprocité

$$r_{L/K} : Gal(L/K) \longrightarrow A_K/N_{L/K}(A_L)$$

est donnée par

$$r_{L/K}(\phi_{L/K}) = \pi_K \bmod N_{L/K}A_L$$

et c'est un isomorphisme.

L'application de réciprocité vérifie les propriétés fonctorielles suivantes :

Proposition 2.1.1. *[Ne1, p. 25]proposition 2.7*

Soient L/K and L'/K' deux extensions Galoisiennes telles que $K \subset K'$ et $L \subset L'$. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} Gal(L'/K') \arrow[r, "r_{L'/K'}"] \arrow[d, "res"] & A'_K/N_{L'/K'}(A'_L) \arrow[d, "N_{K'/K}"] \\ Gal(L/K) \arrow[r, "r_{L/K}"] & A_K/N_{L/K}(A_L) \end{tikzcd}$$

est commutatif , la flèche de gauche étant donnée par la restriction $res : \sigma' \to \sigma'|_L$

L'application réciproque de $r_{L/K}$ est un homomorphisme surjectif

$$(\ , L/K) : A_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)^{ab}$$

de noyau $N_{L/K}(A_L)$. Cette application est appelée *le symbole de la norme résiduelle* de L/K et nous avons :

Proposition 2.1.2. *[Ne1, p. 29]proposition 3.3*

Soient L'/K' et L/K deux extensions Galoisiennes finies telles que $K \subset K'$ et $L \subset L'$, $\sigma \in G$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A'_K \arrow[r, "(\ {,}L'/K')"] \arrow[d, "N_{K'/K}"] & Gal(L'/K')^{ab} \arrow[d, "res"] \\ A_K \arrow[r, "(\ {,}L/K)"] & Gal(L/K)^{ab} \end{tikzcd}$$

Cas particulier des sous-extensions de $\tilde{K}/K$:

Proposition 2.1.3. *[Ne1, p. 30]proposition3.4*

$$deg_K \circ (\ ,\tilde{K}/K) = v_K$$

, en particulier

$$(a, \tilde{K}/K) = \phi_K^{v_K(a)}$$

où ϕ_K désigne le Frobenius générique de $\tilde{K}/K$, $a \in A_K$.

Cette définition nous sera utile pour définir le Frobenius logarithmique dans le cas logarithmique.

Neukirch introduit alors, pour tout corps K, une topologie sur A_K, appelée **topologie de la norme** :

$$a \in A_K \ , \ (a.N_{L/K}A_L)_{L/K}$$

constitue un système de voisinages ouverts de a , où L/K parcourt les extensions Galoisiennes finies de K.

Proposition 2.1.4. *[Ne1, p. 31]Proposition 4.1*

i)Les sous-groupes ouverts de A_K correspondent aux sous-groupes fermés d'indice fini.

ii)v_K est continue ;

iii)Si L/K est une extension finie alors $N_{L/K}$ est continue.

iv)A_K est de Hausdorff si et seulement si le sous-groupe des normes universelles est trivial.

$$A_K^0 = \bigcap_L N_{L/K} A_L$$

Les extensions abéliennes finies L de K sont classifiées par le théorème suivant :

Théorème 2.1.4. *La correspondance 1-1, [Ne1, p. 31]theorem 4.2 :*
L'application

$$L \longrightarrow \mathcal{N}_L = N_{L/K}A_L$$

établit une correspondance bijective entre les extensions abéliennes finies L de K et les sous-groupes ouverts $\mathcal{N}$ de A_K. Si L est associée au sous-groupe ouvert $\mathcal{N}_L$ de A_K alors L est appelé le corps des classes de N et nous avons :

$$Gal(L/K) \simeq A_K/\mathcal{N}_L$$

De plus, $L_1 \subset L_2 \Rightarrow \mathcal{N}_{L_2} \subset \mathcal{N}_{L_1}$ $\mathcal{N}_{L_1L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$ $\mathcal{N}_{L_1 \cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1}\mathcal{N}_{L_2}$.

2.2 Théorie ℓ-adique locale du corps des classes

DANS CETTE SECTION, nous introduisons le ℓ-adifié du groupe multiplicatif du complété d'un corps de nombres K en la place $\mathfrak{p}$. Nous rappelons sa construction, donnée par Jaulent [Ja1]. Puis nous détaillons le G-module, l'application degré et la valuation dans ce contexte local ℓ-adique. Dans le §4 nous prouvons l'axiome local du corps des classes : résultat principal de cette section.

2.2.1 La ℓ-adification du groupe multiplicatif d'un corps local

Définition 2. *Le ℓ-adifié du groupe multiplicatif d'une extension finie $K_\mathfrak{p}$ de $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ est donné par l'expression suivante :*

$$\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} = \varprojlim_k K_\mathfrak{p}^\times \big/ K_\mathfrak{p}^{\times \ell^k}$$

et le ℓ-adifié du groupe des unités est, quant à lui, défini par :

$$\mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}} = \varprojlim_k U_\mathfrak{p} \big/ U_\mathfrak{p}^{\ell^k}$$

Rappelons que [Ca, chapitre 3]

Proposition 2.2.1. *Si A est un anneau noethérien, alors les A-modules noethériens coïncident avec les A-modules de type finis.*

Proposition 2.2.2. *Un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien est compact pour sa topologie naturelle.*

Proposition 2.2.3. *Un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien est isomorphe à la limite projective de ses quotients finis.*

Démonstration. On va considérer l'application suivante ϕ du $\mathbb{Z}_\ell$ module noethérien noté M dans la limite projective $\varprojlim_i M/M_i$,où M_i désigne les sous modules M^{ℓ^i} qui sont des sous modules de type fini.

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & M & \to & \varprojlim_i M/M_i \\ & & x & \mapsto & (x + M_i)_{i \in I} \end{array}$$

Notons $\mathfrak{M} = \varprojlim_i M/M_i$. Cette application est injective : l'intersection des M_i est réduite à zéro. Elle est d'image dense : considérons une famille cohérente $(x_i)_{i\in I}$, un ouvert fondamental $\mathfrak{O} = \prod_{i\in J} O_i(\prod_{i\notin J} M/M_i \cap \mathfrak{M})$. Soit $M_J = \cap_{i\in J} M_i$, et relevons x_J dans M en x, on a alors $(\phi(x))_i = x_i$ pour tout $i \in J$ c'est à dire $\phi(x) - (x_i)_{i\in J} \in \mathfrak{O}$. Ainsi cette application est injective, continue, d'image dense. Or M est compact, en tant que module noethérien, il s'agit donc d'un isomorphisme. $\square$

Proposition 2.2.4. *[Ja1, proposition 1.2]*
Soit $\mathfrak{p}$ une place non archimédienne .
Si $\mathfrak{p}|\ell$, le sous-groupe $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}}$ est isomorphe au groupe des unités principales de $K_{\mathfrak{p}}$, alors

$$\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \simeq U_{\mathfrak{p}}^{1} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$$

Si $\mathfrak{p} \not|\ell$, alors

$$\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \simeq \mu_{\mathfrak{p}} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$$

où $\mu_{\mathfrak{p}}$ désigne le ℓ sous-groupe de Sylow du groupe des racines de l'unité de $K_{\mathfrak{p}}$.

Démonstration. Par le lemme de Hensel :

$$K_{\mathfrak{p}}^{\times} \simeq \mu_{\mathfrak{p}}^{0} \cdot U_{\mathfrak{p}}^{1} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}}$$

Premier cas : si $\mathfrak{p}|\ell$, $\mu_{\mathfrak{p}}^{0}$ est ℓ-divisible ainsi $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \simeq \varprojlim_k U_{\mathfrak{p}}^{1}/U_{\mathfrak{p}}^{1,\ell^k}$, comme $U_{\mathfrak{p}}^{1}$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien et d'après la proposition 3.1.3 , nous avons $\mathcal{U}_{\mathfrak{p}} \simeq U_{\mathfrak{p}}^{1}$. Finalement $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \simeq U_{\mathfrak{p}}^{1} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$.

Deuxième cas : si $\mathfrak{p} \not|\ell$, $U_{\mathfrak{p}}^{1}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module donc ℓ-divisible, et $\mu_{\mathfrak{p}}^{0}/\mu_{\mathfrak{p}}^{0,\ell^k} \simeq \mu_{\mathfrak{p}}$ ainsi $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \simeq \mu_{\mathfrak{p}} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$.

□

Remarque : [Ja1, proposition 1.2]
Si $\mathfrak{p}$ est une place archimédienne, alors

$$\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \simeq 0 \text{ pour } \mathfrak{p} \text{ complexe}$$

$$\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \simeq \mathbb{Z}_\ell/2.\mathbb{Z}_\ell \text{ pour } \mathfrak{p} \text{ réel.}$$

Corollaire 3. *$\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien, qui est compact pour sa topologie naturelle.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini et nous appliquons les propositions 3.1.1 et 3.1.2. □

2.2.2 Cadre de travail

Le théorème fondamental de la théorie ℓ-adique est le suivant :

Théorème 2.2.1. *[Ja1, theorem 2.1] Etant donné un corps local $K_{\mathfrak{p}}$, l'application de réciprocité induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$-modules topologiques de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim_k K_{\mathfrak{p}}^{\times}/K_{\mathfrak{p}}^{\ell^k}$ sur le groupe de Galois $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}} = Gal(K_{\mathfrak{p}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}})$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale du corps $K_{\mathfrak{p}}$.*

Et dans cet isomorphisme l'image du sous groupe d'inertie $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$ est l'image du sous groupe des unités $\mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}}$ de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$.

L'application de réciprocité locale établit alors une correspondance bijective entre les sous-modules fermés de $\mathcal{R}_{K\mathfrak{p}}$ et les ℓ-extensions abéliennes de $K_\mathfrak{p}$: dans cette correspondance les ℓ-extensions abéliennes finies de $K_\mathfrak{p}$ sont associées aux sous-modules fermés d'indice fini de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$; c'est à dire aux sous-modules ouverts de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$.

Notre but est de prouver ce théorème de correspondance 1-1 en utilisant la théorie abstraite du corps des classes de Neukirch. Nous considérons :

.$K_\mathfrak{p}$ est un corps local.

. $K_\mathfrak{p}^{nr}$ est la pro-ℓ-extension abélienne maximale non ramifiée de $K_\mathfrak{p}$: le compositum des ℓ-extensions non ramifiées.

. $K_\mathfrak{p}^{ab}$ est la pro-ℓ-extension abélienne maximale de $K_\mathfrak{p}$: le compositum des ℓ-extensions abéliennes de $K_\mathfrak{p}$.

Rappel :

Nous avons un isomorphisme canonique entre le groupe de Galois $Gal(K_\mathfrak{p}^{nr}/K_\mathfrak{p})$ et $\mathbb{Z}_\ell$, comme il suit [Ne1, p. 41-42].

Soit $\bar{K_\mathfrak{p}}$ la clôture séparable du corps local $K_\mathfrak{p}$ et G son groupe de Galois absolu. Soit $\tilde{K_\mathfrak{p}}/K_\mathfrak{p}$ l'extension maximale non ramifiée de $K_\mathfrak{p}$, i.e le compositum de toutes les extensions finies non ramifiées. $\tilde{K_\mathfrak{p}}$ est généré par les racines de l'unité d'ordre premier à $p = \mathrm{char}(\mathcal{O}_{K_\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{K_\mathfrak{p}})$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\tilde{K_\mathfrak{p}}/K_\mathfrak{p})$ est topologiquement généré par l'automorphisme de Frobenius déterminé par :

$$a^{\phi_\mathfrak{p}} \equiv a^q \bmod \mathfrak{p}_{\tilde{K_\mathfrak{p}}} \text{ pour tout } \; a \in \mathcal{O}_{\tilde{K_\mathfrak{p}}}$$

où q désigne le cardinal du corps résiduel.

Lorsque $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ est une sous-extension finie de $\tilde{K_\mathfrak{p}}/K_\mathfrak{p}$ alors le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p})$ est cyclique et généré par la restriction du Frobenius $\phi_\mathfrak{p}$. Lorsque $n = [L : k]$ nous avons un isomorphisme canonique entre $\mathrm{Gal}(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p})$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui envoie $\phi_\mathfrak{p}$ sur 1 mod $n\mathbb{Z}$. En passant à la limite projective, Neukirch obtient un isomorphisme topologique : $\mathrm{Gal}(\tilde{K_\mathfrak{p}}/K_\mathfrak{p}) \simeq \tilde{\mathbb{Z}}$, en prenant les pro-$\ell$-parties nous obtenons

$$Gal(K_\mathfrak{p}^{nr}/K_\mathfrak{p}) \simeq \mathbb{Z}_\ell.$$

$$\begin{array}{cl} K_\mathfrak{p}^{ab} & \\ | & \\ K_\mathfrak{p}^{nr} & \\ | & \big)\mathbb{Z}_\ell \\ K_\mathfrak{p} & \\ | & \\ \mathbb{Q}_p & \end{array}$$

Nous écrivons

$$G = \mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{p}}^{ab}/K_{\mathfrak{p}}).$$

Nous considérons le $\mathbb{Z}_\ell$-module suivant :

$$A = \varinjlim_{L_{\mathfrak{P}}} \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$$

où $L_{\mathfrak{P}}$ parcourt les extensions $K_{\mathfrak{p}}$, et $\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}} = \varprojlim_k L_{\mathfrak{P}}^{\times} \diagup L_{\mathfrak{P}}^{\times \ell^k}$. Cela s'identifie canoniquement à :

$$A = \bigcup_{[L_{\mathfrak{P}}:K_{\mathfrak{p}}]<\infty} \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}.$$

Si $L_{\mathfrak{P}}$ est une extension finie de $K_{\mathfrak{p}}$,

$$A_{L_{\mathfrak{P}}} = \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$$

est un $\mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})$ module. Le groupe G agit sur A composante par composante.

2.2.3 deg : $G \mapsto \mathbb{Z}_\ell$

Définition 3. *Soit $\phi \in G$, sa restriction à $K_{\mathfrak{p}}^{nr}$ définit un élément de $\mathbb{Z}_\ell$, grâce à l' isomorphisme $Gal(K_{\mathfrak{p}}^{nr}/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathbb{Z}_\ell$. Nous définissons :*

$$\begin{aligned} deg\colon G &\longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \\ \phi &\longmapsto \phi_{|K_{\mathfrak{p}}^{nr}} \end{aligned}$$

deg est ainsi un homomorphisme surjectif de noyau $G_{K_{\mathfrak{p}}^{nr}}$ tel que $G/G_{K_{\mathfrak{p}}^{nr}} \simeq Gal(K_{\mathfrak{p}}^{nr}/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathbb{Z}_\ell$.

Définition 4. *Étant donnée une ℓ-extension finie $L_{\mathfrak{P}}$ de $K_{\mathfrak{p}}$, nous définissons :*

$$f_{L_{\mathfrak{P}}} := (\mathbb{Z}_\ell : \deg(G_{\mathfrak{P}})) \quad e_{L_{\mathfrak{P}}} := (G_{K_{\mathfrak{p}}^{nr}} : I_{L_{\mathfrak{P}}})$$
$$I_{L_{\mathfrak{P}}} = G_{L_{\mathfrak{P}}^{nr}} \cap G_{L_{\mathfrak{P}}} = G_{L_{\mathfrak{P}} \cdot K_{\mathfrak{p}}^{nr}} := G_{K^{nr}}$$

Définition 5. *Soit L/K une ℓ-extension finie, nous définissons :*

$$f_{L/K} = (deg(G_K) : deg(G_L)) \quad e_{L/K} = (I_K : I_L)$$

Proposition 2.2.5. *Nous disposons des relations fondamentales suivantes :*

$$f_{L/K} = f_L/f_K \quad e_{L/K} \cdot f_{L/K} = [L : K]$$

Démonstration. [Ne2, p. 286] □

2.2.4 La valuation

Dans le contexte de la théorie ℓ-adique du corps des classes le degré est un homomorphisme de G dans $\mathbb{Z}_\ell$ et la valuation v est un homomorphisme de A_k dans $\mathbb{Z}_\ell$. Dans cette partie on notera $K_\mathfrak{p}$ le corps local considéré. Pour une extension finie $L_\mathfrak{P}$ du corps local $K_\mathfrak{p}$, nous définissons

$$A_{L_\mathfrak{P}} = \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}} = \varprojlim_k L_\mathfrak{P}^\times / L_\mathfrak{P}^{\times \ell^k}$$

qui est le $Gal(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p})$-module considéré. Étant donné l'expression explicite de $\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}$, donnée par Jaulent [Ja1, proposition 1.2] :

$$\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}} \simeq U^1_\mathfrak{P} \cdot \pi_\mathfrak{P}^{\mathbb{Z}_\ell} \text{ si } \mathfrak{P}|\ell$$

$$\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}} \simeq \mu_\mathfrak{P} \cdot \pi_\mathfrak{P}^{\mathbb{Z}_\ell} \text{ si } \mathfrak{P} \nmid \ell$$

cela permet de définir la valuation v_L comme la puissance en $\mathbb{Z}_\ell$ de l'image de l'uniformisante.

Proposition 2.2.6. *Cette valuation est hensélienne par rapport au degré selon la définition rapportée plus haut.*

Démonstration. La valuation associée à $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$, $v_\mathfrak{p}$, est un homomorphisme surjectif, en effet

$$v_\mathfrak{p}(\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}) = \mathbb{Z}_\ell := \mathrm{Z}\,; \text{ en fait } Z/n.Z \simeq \mathbb{Z}/n.\mathbb{Z} \text{ pour tout } n > 0.$$

Montrons alors que $v_\mathfrak{p}(N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}) = f_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} \cdot Z$. La valuation $v_L : \ \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ peut être vue comme le prolongement de la valuation usuelle normalisée de $L_\mathfrak{P}$, notée par $w_\mathfrak{P}$. Nous avons alors les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} L_\mathfrak{P}^\times & \longrightarrow & \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}} \\ {\scriptstyle w_\mathfrak{P}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_\mathfrak{P}} \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_\ell \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K_\mathfrak{p}^\times & \longrightarrow & \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \\ {\scriptstyle w_\mathfrak{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_\mathfrak{p}} \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_\ell \end{array}$$

La valuation $w_\mathfrak{p}$ s'étend de façon unique à $L_\mathfrak{P}$ de part l'expression : $\frac{1}{[L_\mathfrak{P}:K_\mathfrak{p}]}(w_\mathfrak{p} \circ N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}})$, et ainsi $v_\mathfrak{p}$ s' étend donc à $L_\mathfrak{P}$. Comme $\frac{1}{e_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}} \cdot w_\mathfrak{P}$ est le prolongement de $w_\mathfrak{p}$, nous obtenons :

$$\frac{1}{e_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}} \cdot v_\mathfrak{P}(\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) = \frac{1}{[L_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{p}]} \cdot v_\mathfrak{p}(N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}) = \frac{1}{e_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}.f_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}} \cdot v_\mathfrak{p}(N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_k)$$

Par suite, nous en déduisons :

$$f_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} \cdot v_\mathfrak{P}(\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) = v_k(N_{L_\mathfrak{P}/k}\mathcal{R}_k)$$

Or nous disposons de la relation $f_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = f_{L_{\mathfrak{P}}}/f_{K_{\mathfrak{p}}}$, et de part la définition de $f_{K_{\mathfrak{p}}}$ nous avons $f_{K_{\mathfrak{p}}} = (\mathbb{Z}_\ell : d(G_{K_{\mathfrak{p}}})) = 1$ de part la surjectivité de l'application degré. Finalement, nous avons :

$$f_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \cdot v_{\mathfrak{P}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = f_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \cdot \mathbb{Z}_\ell = v_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}})$$

pour toutes les extensions finies $L_{\mathfrak{P}}$ de $K_{\mathfrak{p}}$, le deuxième point (ii) est donc vérifié. □

2.2.5 L'axiome du corps des classes

Nous devons montrer :

Théorème 2.2.2. *Pour toute ℓ-extension cyclique $L_{\mathfrak{P}}$ d'un corps local $K_{\mathfrak{p}}$ nous avons :*

$$|H^i(G(L_{\mathfrak{P}}/K_p), \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})| = \begin{cases} [L_{\mathfrak{P}} : K_p] & \textit{pour } i = 0 \\ 1 & \textit{pour } i = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $G := G(L_{\mathfrak{P}}/K_p)$

Nous considérons la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow L_{\mathfrak{P}}^{\times div} \longrightarrow L_{\mathfrak{P}}^{\times} \longrightarrow L_{\mathfrak{P}}^{\times}/L_{\mathfrak{P}}^{\times div} \longrightarrow 1$$

où $L_{\mathfrak{P}}^{\times div}$ désigne la partie ℓ-divisible du groupe multiplicatif $L_{\mathfrak{P}}^{\times}$. Nous rappelons qu'un groupe abélien multiplicatif est dit ℓ-divisible si chaque élément est une puissance ℓ^n-ième pour tout entier n. Puisque G est cyclique, nous obtenons l'hexagone de Herbrand suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^0(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times}) \arrow[dr] & \\
\mathrm{H}^{-1}(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times}/L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) \arrow[ur] & & & \mathrm{H}^0(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times}/L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) \arrow[dl] \\
 & \mathrm{H}^{-1}(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times}) \arrow[ul] & \mathrm{H}^{-1}(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

i) D'après le théorème 90 de Hilbert, nous savons que $\mathrm{H}^{-1}(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times}) = 1$.

ii)Montrons que $\mathrm{H}^0(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) = 1$ et $\mathrm{H}^{-1}(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) = 1$. Le lemme de Hensel nous donne : $L_{\mathfrak{P}}^{\times} \simeq \mu_{\mathfrak{P}}^0 \cdot U_{\mathfrak{P}}^1 \cdot \pi_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}}$ et $\mu_{\mathfrak{P}}^0 \simeq \mu_{\mathfrak{P}} \cdot \mu_{\mathfrak{P},div}$ où $\mu_{\mathfrak{P}}$ est le ℓ-sous-groupe de Sylow du groupe des racines de l'unité, et $\mu_{\mathfrak{P},div}$ sa partie ℓ-divisible.

• *case 1* : Si $\mathfrak{P} \nmid \ell$ alors $U_{\mathfrak{P}}^1$ est un $\mathbb{Z}_{\mathfrak{P}}$-module, comme $\mathfrak{P}$ est inversible dans $\mathbb{Z}_\ell$, il suit que $U_{\mathfrak{P}}^1$ est ℓ -divisible ainsi que $\mu_{\mathfrak{P},div} \cdot U_{\mathfrak{P}}^1$. Nous avons alors $h(G, \mu_{\mathfrak{P},div} \cdot U_{\mathfrak{P}}^1) = h(G, \mu_{\mathfrak{P},div}) \cdot$

$h(G, U^1_{\mathfrak{P}})$; but $h(G, \mu_{\mathfrak{P},div}) = 1$ (comme $\mu_{\mathfrak{P},div}$ is a finite group) et $h(G, U^1_{\mathfrak{P}}) = 1$ [Ne1, p. 40] ainsi : $h(G, \mu_{\mathfrak{P},div} \cdot U^1_{\mathfrak{P}}) := h(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) = 1$. De plus, si A est un G-module par définition $\mathrm{H}^0(G, A) = \mathrm{Ker}(\delta)/\mathrm{Im}(\nu)$ où

$$\begin{aligned} \delta \colon A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto (\sigma - 1)a \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mu \colon A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto Tr_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(a) \end{aligned}$$

Si $a \in \mathrm{Ker}(\delta) \cap L_{\mathfrak{P}}^{\times div}$ alors $a \in (\mu_{\mathfrak{P},div} \cdot U^1_{\mathfrak{P}})^G = (\mu_{\mathfrak{p},div} \cdot U^1_{\mathfrak{p}})$ puisque cette extension est Galoisienne, où $K_{\mathfrak{p}}^{\times} \simeq \mu_{\mathfrak{p}} \cdot \mu_{\mathfrak{p},div} \cdot U^1_{\mathfrak{p}} \cdot \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}}$. Par conséquent $a \in K_{\mathfrak{p}}^{\times div}$ et ainsi nous pouvons choisir $b \in K_{\mathfrak{p}}^{\times}$ tel que $a = b^{\ell^{[L_{\mathfrak{P}}:K_p]}} = N(b)$. Il s'ensuit que $\mathrm{H}^0(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) = 1$. Or $h(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) = 1$, finalement nous en déduisons $\mathrm{H}^{-1}(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) = 1$.

• *cas 2* : Si $\mathfrak{P} \mid \ell$ le groupe $\mu^0_{\mathfrak{P}}$ est ℓ-divisible, et comme le groupe des unités principales est un $\mathbb{Z}_\ell$-module noethérien, il est isomorphe à la limite projective de ses quotients finis : $L_{\mathfrak{P}}^{\times} \simeq \underbrace{\mu^0_{\mathfrak{P}}}_{div\,part} \cdot U^1_{\mathfrak{P}} \cdot \pi_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}}$. Puisque $\mu^0_{\mathfrak{P}}$ est fini, nous avons $h(G, \mu^0_{\mathfrak{P}}) = 1$; en utilisant les mêmes arguments que dans le cas 1, nous obtenons finalement que $\mathrm{H}^0(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times div})$ est trivial et il en est de même pour $\mathrm{H}^{-1}(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times div})$.

iii)En utilisant l'hexagone de Herbrand, nous avons $\mathrm{H}^{-1}(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times}/L_{\mathfrak{P}}^{\times div}) = 1$.

iv) De part l'hexagone de Herbrand, nous obtenons : $\mathrm{H}^0(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times}) \simeq \mathrm{H}^0(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times}/L_{\mathfrak{P}}^{div})$. Or de part l'axiome du corps des classes, nous avons : $|\mathrm{H}^0(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times})| = [L_{\mathfrak{P}} : K_p]$. Finalement, nous obtenons $|\mathrm{H}^0(G, L_{\mathfrak{P}}^{\times}/L_{\mathfrak{P}}^{div})| = [L_{\mathfrak{P}} : K_p]$.

v) Montrons alors que $h(G, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = [L_{\mathfrak{P}} : K_p]$.

Nous considérons la suite exacte suivante, où $\mathbb{Z}_\ell$ est un G-module trivial :

$$1 \longrightarrow \mathcal{U}_{L_{\mathfrak{P}}} \longrightarrow \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}} \xrightarrow{v_{\mathfrak{P}}} \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 1.$$

Rappelons que

$$: \text{si } \mathfrak{P} \mid \ell \quad \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}} \simeq U^1_{\mathfrak{P}} \cdot \pi_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}_\ell} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_{L_{\mathfrak{P}}} \simeq U^1_{\mathfrak{P}}$$

$$: \text{sinon} \quad \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}} \simeq \mu_{\mathfrak{P}} \cdot \pi_{\mathfrak{P}}^{\mathbb{Z}_\ell} \quad \text{and} \quad \mathcal{U}_{L_{\mathfrak{P}}} \simeq \mu_{\mathfrak{P}}$$

Ainsi,

$$h(G, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = h(G, \mathcal{U}_{L_{\mathfrak{P}}}) \cdot h(G, \mathbb{Z}_\ell).$$

Puisque $\mathbb{Z}_\ell$ est un G-module trivial, nous avons :

$$\mathrm{H}^0(G, \mathbb{Z}_\ell) \simeq \mathbb{Z}_\ell/(|G| \cdot \mathbb{Z}_\ell) \quad \mathrm{H}^{-1}(G, \mathbb{Z}_\ell) = 1 \quad \text{et} \quad h(G, \mathbb{Z}_\ell) = [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}].$$

Par conséquent il suffit de montrer que $h(G,\mathcal{U}_{L_{\mathfrak{P}}}) = 1$.

Si $\mathfrak{P} \nmid \ell$: comme $\mu_{\mathfrak{P},\ell}$ est le ℓ-sous-groupe de Sylow du groupe des unités de $L_{\mathfrak{P}}$, il s'agit d'un groupe fini donc d'un G-module de type fini, par conséquent par propriété du quotient de Herbrand, nous en déduisons $h(G,\mathcal{U}_{L_{\mathfrak{P}}}) = 1$.

Si $\mathfrak{P} \mid \ell$: nous utilisons le fait que $h(G, U_{L_{\mathfrak{P}}}) = 1$ [Ne1, p. 40] et la suite exacte :

$$1 \longrightarrow U^1_{L_{\mathfrak{P}}} \longrightarrow U_{L_{\mathfrak{P}}} \longrightarrow U_{L_{\mathfrak{P}}}/U^1_{L_{\mathfrak{P}}} \longrightarrow 1$$

D'après le lemme de Hensel, $U_{L_{\mathfrak{P}}}/U^1_{L_{\mathfrak{P}}} \simeq \kappa^*$ où κ désigne le corps résiduel. Il suit $h(G, U_{L_{\mathfrak{P}}}) = h(G, U^1_{L_{\mathfrak{P}}}) \cdot h(G, U_{L_{\mathfrak{P}}}/U^1_{L_{\mathfrak{P}}})$. Dans ce cas nous obtenons alors , $h(G, L^1_{L_{\mathfrak{P}}}) = 1$.

Ainsi, dans les deux cas, nous avons $h(G,\mathcal{U}_{L_{\mathfrak{P}}}) = 1$. Finalement, $h(G, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = [L_{\mathfrak{P}} : K_p]$.

vi) Il découle des étapes précédentes que :

$$|\mathrm{H}^0(G, L^\times_{\mathfrak{P}}/L^{div}_{\mathfrak{P}})| = [L_{\mathfrak{P}} : K_p] \qquad |\mathrm{H}^{-1}(G, L^\times_{\mathfrak{P}}/L^{div}_{\mathfrak{P}})| = 1 \qquad h(G, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = [L_{\mathfrak{P}} : K_p].$$

Comme $\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}} = \varprojlim_k L^\times_{\mathfrak{P}} \big/ L^{\times\ell^k}_{\mathfrak{P}} = \mathbb{Z}_\ell \otimes L^\times_{\mathfrak{P}}/L^{\times div}_{\mathfrak{P}}$, nous avons $\mathrm{H}^0(G, L^\times_{\mathfrak{P}}/L^{\times div}_{\mathfrak{P}}) = \mathrm{H}^0(G, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})$ et nous obtenons

$$|\mathrm{H}^0(G, L^\times_{\mathfrak{P}}/L^{\times div}_{\mathfrak{P}})| = |\mathrm{H}^0_\ell(G, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})| = [L_{\mathfrak{P}} : K_p]$$

Mais $h(G, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = [L_{\mathfrak{P}} : K_p]$, par conséquent nous en déduisons :

$$\mathrm{H}^{-1}(G, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = 1.$$

Comme G est un groupe cyclique, nous obtenons :

$$\mathrm{H}^1(G, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = 1.$$

□

Corollaire 4. *Soit* (deg, v) *un couple de corps des classes, et soit* $A_K = \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ *satisfaisant l'axiome du corps des classes. Alors pour toute* ℓ*-extension abélienne finie* $L_{\mathfrak{P}}$ *de* $K_\mathfrak{p}$ *, une extension finie de* $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ *nous avons l'isomorphisme :*

$$Gal(L_{\mathfrak{P}}/K_\mathfrak{p}) \simeq \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}/N_{L_{\mathfrak{P}}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}.$$

Théorème 2.2.3. *La correspondance 1-1*

L'application

$$L_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathcal{N}_L = N_{L_{\mathfrak{P}}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$$

établit une correspondance bijective entre les ℓ*-extensions abéliennes finies* $L_{\mathfrak{P}}$ *de* $K_\mathfrak{p}$ *et les sous-modules fermés d'indice fini* $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$*. Si* $L_{\mathfrak{P}}$ *est associé au sous-module* $\mathcal{N}_L$ *de* $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ *alors* $L_{\mathfrak{P}}$ *est appelé le corps des classes de* $\mathcal{N}_L$ *et nous avons :*

$$Gal(L_{\mathfrak{P}}/K_\mathfrak{p}) \simeq \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}/N_{L_{\mathfrak{P}}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}.$$

De plus, $L_1 \subset L_2 \Rightarrow \mathcal{N}_{L_2} \subset \mathcal{N}_{L_1} \qquad \mathcal{N}_{L_1L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2} \qquad \mathcal{N}_{L_1 \cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1}\mathcal{N}_{L_2}$.

Démonstration. D'après [Ne1, theorem II4.2], nous devons seulement montrer que les sous-modules $\mathcal{N}$ de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ qui sont ouverts pour la topologie de la norme, sont précisément les sous-modules d'indice fini $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$.

Si $\mathcal{N}$ est un sous-module ouvert pour la topologie de la norme, alors il est fermé d'indice fini. En effet il contient par définition un sous-module du type $N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}(\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}})$ où $L_\mathfrak{P}$ est une ℓ-extension abélienne finie de $K_\mathfrak{p}$. Par suite, en appliquant le théorème précédent, nous en déduisons qu'il est d'indice fini.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{N}$ soit un sous-module fermé d'indice fini de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ alors il est ouvert pour la topologie de la norme. En effet, la topologie de la norme est compatible avec la structure de $\mathbb{Z}_\ell$-module topologique de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$, or le ℓ-adifié du groupe multiplicatif d'un corps local est un module noethérien, il existe donc une unique topologie compatible avec sa structure : ainsi les deux coïncident .

$\square$

2.3 Théorie ℓ-adique globale du corps des classes

NOUS COMMENÇONS cette section par un rappel des objets principaux de la théorie ℓ-adique globale du corps des classes de Jaulent [Ja3]. Puis nous déterminons le quotient de Herbrand du ℓ-groupe des classes d'idèles, en vue de prouver l'axiome du corps des classes dans le contexte global : résultat principal §3. Nous explicitons ensuite le G-module, l'application degré et la valuation dans ce contexte global.

2.3.1 Les $\mathbb{Z}_\ell$-modules fondamentaux globaux

Définition 6. *[Ja1, definition 1.3]*

Soit K un corps des nombres, le ℓ-groupe des idèles est défini par

$$\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K}^{res} (\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}})$$

il s'agit donc du produit restreint des ℓ-adifiés des groupes multiplicatifs des complétés, i.e ces éléments $(x_\mathfrak{p})\mathfrak{p} \in Pl_K$ sont des unités à l'exception d'un nombre fini d'entre eux . Et le groupe s'écrit comme une réunion :

$$\mathcal{J}_K = \bigcup_S \mathcal{J}_K^S \quad \text{où} \quad \mathcal{J}_K^S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} (\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}) \prod_{\mathfrak{p} \notin S} (\mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}})$$

quand S parcourt les ensembles finis de places de K.

Proposition 2.3.1. *[Ja1, definition 1.3]*

Chaque $\mathcal{J}_K^S$ est compact pour sa topologie naturelle de $\mathbb{Z}_\ell$-module (toplologie produit). Et $\mathcal{J}_K$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module pour la topologie de la limite inductive : les sous-modules ouverts de $\mathcal{J}_K$ sont ceux qui intersectent chaque $\mathcal{J}_K^S$ suivant un sous-module ouvert relatif.

Définition 7. *[Ja1, definition 1.4]*

Le ℓ-groupe des idèles principaux est défini par :

$$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$$

Il s'identifie canoniquement à un sous-groupe fermé de $\mathcal{J}_K$.

Proposition 2.3.2. *[Ja1, théorème 1.4]*

L'application naturelle de $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{J}_K$, induite par l'injection diagonale de K dans $\prod K_\mathfrak{p}$ est continue. Le ℓ-groupe des classes d'idèles est défini par :

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$$

C'est un groupe topologique compact.

Remarque :

Dans la théorie classique du corps des classes, le groupe des classes d'idèles C_K est un groupe topologique localement compact et nous avons : $C_K \simeq C_K^0 * \ R_+$, cette expression est obtenue via l'application suivante : où I_K désigne le groupe des idèles

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & I_K & \rightarrow & R_+ \\ & & \alpha_{\mathfrak{p}} & \mapsto & \prod |\alpha_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

Cette application peut être prolongée au groupe des classes tout entier, car par la formule du produit un idèle principal s'envoie sur 1. Notons C_K^0 le noyau de cette application prolongée. Des arguments de géométrie des nombres permettent de prouver que C_K^0 est compact.

Le théorème fondamental de la théorie ℓ-adique globale est le suivant :

Théorème 2.3.1. *[Ja1, théorème 2.3] Etant donné un corps de nombres K, l'application de réciprocité induit un isomorphisme continu du ℓ-groupe des idèles $\mathcal{J}_K$ de K sur le groupe de Galois $G_K^{ab} = Gal(K^{ab}/K)$ de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de K.*

Le noyau de ce morphisme est $\mathcal{R}_K$ le groupe des idèles principaux.

Dans cette correspondance„le sous-groupe de décomposition $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}$ d'une place $\mathfrak{p}$ de K est l'image dans G_K^{ab} du sous-groupe $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ de $\mathcal{J}_K$; et le sous-groupe d'inertie $\mathcal{I}_{\mathfrak{p}}$ est l'image du sous-groupe des unités $\mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}}$ de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$.

L'application de réciprocité établit une correspondance bijective entre les sous-modules fermés de $\mathcal{J}_K$ contenant $\mathcal{R}_K$ et les ℓ-extensions abéliennes de K. Chaque sous-extension de K^{ab} est le corps des points fixes d'un unique sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$ contenant $\mathcal{R}_K$.

Dans cette correspondance, les ℓ-extensions abéliennes finies de K sont associées aux sous-modules fermés d'indice fini de $\mathcal{J}_K$ contenant $\mathcal{R}_K$, i.e aux sous-modules ouverts de $\mathcal{J}_K$ contenant $\mathcal{R}_K$. Ainsi pour L une ℓ-extension abélienne finie de K, nous avons :

$$Gal(L/K) \simeq \mathcal{J}_K / N_{L/K}(\mathcal{J}_L) \cdot \mathcal{R}_K$$

$$D_{\mathfrak{p}}(L/K) \simeq \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} / \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \cap N_{L/K}(\mathcal{J}_L) \cdot \mathcal{R}_K$$

$$I_{\mathfrak{p}}(L/K) \simeq \mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}} / \mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}} \cap N_{L/K}(J_L) \cdot \mathcal{R}_K$$

Notre but est de prouver le théorème de correspondance bijective en utilisant la théorie abstraite de Neukirch. Nous définissons pour cela tous les éléments nécessaires en vue d'obtenir une nouvelle démonstration du théorème fondamental de la théorie ℓ-adique du corps des classes : Théorème 2.

2.3.2 Le quotient de Herbrand

Le but de cette section est de déterminer le quotient de Herbrand du ℓ-groupe des classes d'idèles.

Lemme 2.3.1. *Soit L/K une extension finie de corps de nombres, alors l' injection de $\mathcal{J}_K$ dans $\mathcal{J}_L$ induit une injection entre leurs ℓ-groupes des classes d'idèles : $\alpha \cdot \mathcal{R}_K \longmapsto \alpha \cdot \mathcal{R}_L$.*

Démonstration. L' injection de $\mathcal{J}_K$ dans $\mathcal{J}_L$ envoie $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{R}_L$, ainsi l'application est bien définie. Elle induit un homomorphisme entre $\mathcal{C}_K$ et $\mathcal{C}_L$. Pour montrer que cet homomorphisme est injectif il suffit de prouver que$\mathcal{J}_K \cap \mathcal{R}_L = \mathcal{R}_K$. Soit M/K la clôture Galoisienne de L/K, de groupe de Galois G. Nous avons

$$\mathcal{J}_K \subseteq \mathcal{J}_L \subseteq \mathcal{J}_M \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_K \subseteq \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{R}_M$$

ainsi

$$\mathcal{J}_K \cap \mathcal{R}_L \subseteq \mathcal{J}_K \cap \mathcal{R}_M \subseteq (\mathcal{J}_K \cap \mathcal{R}_M)^G \subseteq \mathcal{J}_K \cap \mathcal{R}_M^G = \mathcal{J}_K \cap \mathcal{R}_K = \mathcal{R}_K.$$

□

Lemme 2.3.2. *Soit L/K une ℓ-extension Galoisienne finie, G son groupe de Galois, alors le ℓ-groupe des classes d'idèles $\mathcal{C}_L$ de L est canoniquement un G-module et $\mathcal{C}_L^G = \mathcal{C}_K$.*

Démonstration. $\mathcal{J}_L$ est un G-module, et $\mathcal{R}_L$ en est un sous-G-module. L'action $(\sigma, \alpha \cdot \mathcal{R}_L) \mapsto \sigma(\alpha) \cdot \mathcal{R}_L$ équipe $\mathcal{C}_L$ d'une structure de G-module. Comme nous avons la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathcal{R}_L \longrightarrow \mathcal{J}_L \longrightarrow \mathcal{C}_L \longrightarrow 1$$

nous obtenons :

$$1 \longrightarrow \mathcal{R}_L^G \longrightarrow \mathcal{J}_L^G \longrightarrow \mathcal{C}_L^G \longrightarrow \mathrm{H}^1_\ell(G, \mathcal{R}_L).$$

Mais $\mathcal{R}_L^G = (\mathbb{Z}_\ell \otimes L^\times)^G = \mathbb{Z}_\ell \otimes (L^\times)^G = \mathcal{R}_K$ et $\mathcal{J}_L^G = \mathcal{J}_K$. Le théorème sur la $\mathbb{Z}_\ell$-cohomologie et le théorème 90 de Hilbert impliquent alors $\mathrm{H}^1(G, \mathcal{R}_L) = 1$, d'où le résultat.

□

Théorème 2.3.2. *Le quotient de Herbrand du ℓ-groupe des classes d'idèles*

Soit L/K une ℓ-extension Galoisienne cyclique de degré fini ℓ^n, G son groupe de Galois, alors nous avons

$$h_\ell(G, \mathcal{C}_L) = \frac{|H^0(G, \mathcal{C}_L|}{|H^1(G, \mathcal{C}_L)|} = \ell^n.$$

En particulier $(\mathcal{C}_K : N_{L/K}\mathcal{C}_L) \geq \ell^n$.

Démonstration. La preuve se découpe en quatre étapes.

Etape 1 :

Nous montrons dans cette partie que pour un ensemble S suffisamment grand de places, nous avons :

$$\mathcal{J}_K = \mathcal{J}_K^S \cdot \mathcal{R}_K \quad \text{où} \quad \mathcal{J}_K = \bigcup_S \mathcal{J}_K^S \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_K^S = \prod_{\mathfrak{p}\in S}(\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}) \prod_{\mathfrak{p}\notin S}(\mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}})$$

où S parcourt les ensembles finis de places de K.

Soit $\mathcal{D}_K := \bigoplus_{\mathfrak{p}\nmid\infty} \mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell} \bigoplus_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell/2\cdot\mathbb{Z}_\ell}$. Nous considérons la somme directe topologique $\mathcal{J}_K = \mathcal{D}_K \oplus \mathcal{U}_K$ et l'application :

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathcal{J}_K &\longrightarrow \mathcal{D}_K \\ \alpha = (\alpha_\mathfrak{p}) &\longmapsto \prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})} \end{aligned}$$

Cet homomorphisme est surjective, de noyau $\mathcal{J}_K^{S_\infty}$, où $S_\infty = \{\mathfrak{p} \mid \infty\}$. Ainsi nous obtenons l'isomorphisme : $\mathcal{J}_K/\mathcal{J}_K^{S_\infty} \simeq \mathcal{D}_K$. Notons $\mathcal{P}_K$ l'image de $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{D}_K$, alors nous avons : $\mathcal{R}_K \cdot \mathcal{J}_K^{S_\infty}/\mathcal{J}_K^{S_\infty} \simeq \mathcal{P}_K$ C'est pourquoi :

$$\mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K \cdot \mathcal{J}_K^{S_\infty} \simeq \mathcal{D}_K/\mathcal{P}_K \simeq \mathcal{C}\ell_K$$

où $\mathcal{C}\ell_K$ est le groupe des classes de diviseurs, [Ja1, p. 364]. En particulier $\mathcal{D}_K/\mathcal{P}_K$ est fini. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_h$ des représentants des classes de $\mathcal{D}_K/\mathcal{P}_K$; et $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ les premiers qui divisent $a_1, a_2, \ldots, a_h$, posons alors $S := S_\infty \cup \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l\}$. Soit $\alpha = (\alpha_\mathfrak{p}) \in \mathcal{J}_K$, nous écrivons $\phi(\alpha) = a_i \cdot d$ où $d \in \mathcal{R}_K$. Alors $\alpha \cdot d^{-1} \in \mathcal{J}_K^S$.

Etape 2 : la cohomologie de $\mathcal{J}_L$ et de $\mathcal{J}_L^S$

Nous définissons d'abord, pour L/K extension Galoisienne finie, (de groupe de Galois G) :

$$\mathcal{J}_L^\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}, \quad \mathcal{U}_L^\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}}$$

pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K. Comme un élément de G permute les premiers au dessus de $\mathfrak{p}$, $\mathcal{J}_L^\mathfrak{p}$ et $\mathcal{U}_L^\mathfrak{p}$ sont des G-modules et nous avons :

$$\mathcal{J}_L = \textstyle\prod_\mathfrak{p} \mathcal{J}_L^\mathfrak{p}, \quad \mathcal{U}_L = \prod_\mathfrak{p} \mathcal{U}_L^\mathfrak{p}$$

Soit $\mathfrak{P}$ une place fixée de L au dessus de $\mathfrak{p}$, $G_\mathfrak{P} = \mathrm{Gal}(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}) \subseteq G$ le sous-groupe de décomposition associé, si σ parcourt les classes d'équivalence de $G/G_\mathfrak{P}$ alors $\sigma(\mathfrak{P})$ parcourt les différents premiers de L au dessus de $\mathfrak{p}$. Alors

$$\mathcal{J}_L^\mathfrak{p} = \prod_{\sigma\in G/G_\mathfrak{P}} \mathcal{R}_{L_{\sigma(\mathfrak{P})}} = \prod_{\sigma\in G/G_\mathfrak{P}} \sigma(\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}), \quad \mathcal{U}_L^\mathfrak{p} = \prod_{\sigma\in G/G_\mathfrak{P}} \mathcal{U}_{L_{\sigma(\mathfrak{P})}}$$

Nous en déduisons ainsi que $\mathcal{J}_L^\mathfrak{p}$ et $\mathcal{U}_L^\mathfrak{p}$ sont des G-modules induits :

$$\mathcal{J}_L^\mathfrak{p} = \mathrm{Ind}_{G_\mathfrak{P}}^G(\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}), \quad \mathcal{U}_L^\mathfrak{p} = \mathrm{Ind}_{G_\mathfrak{P}}^G(\mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}}).$$

Nous écrivons pour S un ensemble de premiers de K : $J_L^S := J_L^{\overline{S}}$, où $\overline{S}$ est l'ensemble des premiers de L de S. Nous avons alors la décomposition de G-modules :

$$\mathcal{J}_L^S = \prod_{\mathfrak{p}\in S}(\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) \prod_{\mathfrak{p}\notin S}(\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}}) = \prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{J}_L^\mathfrak{p} \cdot \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathcal{U}_L^\mathfrak{p}.$$

Proposition 2.3.3. *Soit S l'ensemble contenant les places à l'infini et les places de K qui se ramifient , $\mathfrak{P}$ un premier de$L$ au dessus de $\mathfrak{p}$, $G_\mathfrak{P}$ le sous-groupe de décomposition associé ; alors pour $i = 0, 1$ nous obtenons :*

$$H^i(G, \mathcal{J}_L^S) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} H^i(G_\mathfrak{P}, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) \quad \textit{and} \quad H^i(G, \mathcal{J}_L) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}} H^i(G_\mathfrak{P}, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}})$$

Démonstration. Nous avons $\mathcal{J}_L^S = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} \mathcal{J}_L^\mathfrak{p} \oplus V$ avec $V = \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathcal{U}_L^\mathfrak{p}$. C'est pourquoi nous obtenons l'isomorphisme pour $i = 0, 1$:

$$\mathrm{H}^i(G, \mathcal{J}_L) = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in S} \mathrm{H}^i(G, \mathcal{J}_L^\mathfrak{p}) \oplus \mathrm{H}^i_\ell(G, V) \quad \text{et l' injection} \quad \mathrm{H}^i(G, V) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\notin S} \mathrm{H}^i(G, \mathcal{U}_L^\mathfrak{p}).$$

De plus, d'après la proposition précédente $\mathcal{J}_L^\mathfrak{p}$ et $\mathcal{U}_L^\mathfrak{p}$ sont des G-modules induits, ainsi

$$\mathrm{H}^i(G, \mathcal{J}_L^\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{H}^i(G, M_G^{G_\mathfrak{P}} \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) \simeq \mathrm{H}^i(G_\mathfrak{P}, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}})$$

$$\mathrm{H}^i(G, \mathcal{U}_L^\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{H}^i(G, M_G^{G_\mathfrak{P}} \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}}) \simeq \mathrm{H}^i(G_\mathfrak{P}, \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}}).$$

De part le choix de S, si $\mathfrak{p} \notin S$ alors $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ est une ℓ-extension non ramifiée, d'où $\mathrm{H}^i(G_\mathfrak{P}, \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}}) = 1$ par la proposition suivante. □

Proposition 2.3.4. *Soit $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ une ℓ-extension non ramifiée, alors nous avons :*

$$H^i(Gal(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}), \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}})) = 1 \textit{ pour } i = 0, 1.$$

Démonstration. Notons $G = \mathrm{Gal}(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p})$. Nous considérons alors la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 1$$

avec $\mathbb{Z}_\ell$ G-module trivial. Nous obtenons l'hexagone de Herbrand suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{H}^0(G, \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}}) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(G, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) \arrow[dr] & \\
\mathrm{H}^{-1}(G, \mathbb{Z}_\ell) \arrow[ur] & & & \mathrm{H}^0(G, \mathbb{Z}_\ell) \arrow[dl] \\
& \mathrm{H}^{-1}(G, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) \arrow[ul] & \mathrm{H}^{-1}(G, \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}}) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, nous obtenons la suite exacte suivante en utilisant l'axiome ℓ-adique local du corps des classes :

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, \mathbb{Z}_\ell) \longrightarrow \mathrm{H}^{-1}(G, \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}}) \longrightarrow 1.$$

L'application $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ est la restriction de la valuation $v_\mathfrak{P}$ de $\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}$. comme $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ est une extension non ramifiée ($e_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} = 1$) cette restriction est surjective : en effet un élément premier $\pi_\mathfrak{p}$ de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ est aussi un élément premier de $\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}$ puisque

$$v_\mathfrak{P}(\pi_\mathfrak{p}) = \frac{1}{f_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}} v_\mathfrak{p}(N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} \pi_\mathfrak{p}) = e_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} v_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p}) = 1.$$

Ainsi l'application $\mathrm{H}^0(G, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(G, \mathbb{Z}_\ell)$ est surjective et par conséquent bijective puisque $|\mathrm{H}^0(G, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}})| = |\mathrm{H}^0(G, \mathbb{Z}_\ell)| = [L_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{p}]$ par l'axiome local ℓ-adique du corps des classes et puisque $\mathbb{Z}_\ell$ est un G-modue trivial.

Ainsi il vient :

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}), \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}})) = 1.$$

D'après la preuve donnée page 9, nous avons

$$h(\mathrm{Gal}(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}), \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}})) = 1 \quad \text{ainsi} \quad \mathrm{H}^0(\mathrm{Gal}(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}), \mathcal{U}_{L_\mathfrak{P}})) = 1.$$

□

Par conséquent, nous obtenons

$$\mathrm{H}^i(G, \mathcal{J}_L^S) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} \mathrm{H}^i(G_\mathfrak{P}, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}})$$

$$\mathrm{H}^i(G, \mathcal{J}_L) = \varprojlim_S \mathrm{H}^i(G, \mathcal{J}_L^S) = \varprojlim_S \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{H}^i(G_\mathfrak{P}, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) = \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{H}^i(G_\mathfrak{P}, \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}).$$

Etape 3 :

Le ℓ-groupe des S-unités est défini par $\mathcal{E}_K^S = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^S$. Soit S l'ensemble contenant les places à l'infini et les premiers qui se ramifient, nous montrons que :

$$h(G, \mathcal{E}_L^S) = \frac{1}{\ell^n} \textstyle\prod_{\mathfrak{p} \in S} n_\mathfrak{p},$$

où $n_\mathfrak{p}$ désigne l'indice du sous-groupe de décomposition. Or le quotient de Herbrand, rattaché à un module Galoisien dans une extension cyclique, ne dépend que du caractère de la représentation qui lui est associée : cela donne en effet la structure de G-module à un fini près. Nous utilisons alors la propriété qui nous dit que si M est un sous-module d'indice fini alors son quotient de Herbrand est trivial. Ce caractère est donc donné par le caractère de représentation de Herbrand.

Etape 4 : Conclusion

Soit S l'ensemble de places décrit précédemment, alors nous avons :

$$1 \longrightarrow \mathcal{E}_L^S \longrightarrow \mathcal{J}_L^S \longrightarrow \mathcal{J}_L^S \cdot \mathcal{R}_L/\mathcal{R}_L = \mathcal{C}_L \longrightarrow 1.$$

Comme L/K est une ℓ-extension cyclique, nous obtenons :

$$h(G, \mathcal{J}_L^S) = h(G, \mathcal{E}_K^S) \cdot h(G, \mathcal{C}_L).$$

Mais

$$\mathrm{H}^i(G, \mathcal{J}_L^S) \simeq \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathrm{H}^i(G_{\mathfrak{P}}, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})$$

pour $i = 0, 1$.

De part l'axiome du corps des classes local, nous en déduisons

$$|\mathrm{H}^0(G_{\mathfrak{P}}, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})| = n_{\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad |\mathrm{H}^1(G_{\mathfrak{P}}, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})| = 1$$

Ainsi, $h(G, \mathcal{J}_L^S) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} n_{\mathfrak{p}}$. D'après l'étape 3 : $h(G, \mathcal{E}_L^S) = \frac{1}{\ell^n} \prod_{\mathfrak{p} \in S} n_{\mathfrak{p}}$, d'où $h(G, \mathcal{C}_L) = \ell^n$. □

2.3.3 L'axiome du corps des classes

Cette section est consacrée à la preuve du théorème suivant :

Théorème 2.3.3. ***L'axiome du corps des classes*** *Soit L/K une ℓ-extension cyclique de corps de nombres, alors :*

$$|H^i(G(L/K), \mathcal{C}_L)| = \begin{cases} [L:K] & \text{pour } i = 0 \\ 1 & \text{pour } i = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Puisque $h(G(L/K), \mathcal{C}_L) = [L : K] = \ell^n$, il suffit de montrer que

$$\mathrm{H}^{-1}(G(L/K), \mathcal{C}_L) = \mathrm{H}^1(G(L/K), \mathcal{C}_L) = 1.$$

La suite exacte $1 \longrightarrow \mathcal{R}_L \longrightarrow \mathcal{J}_L \longrightarrow \mathcal{C}_L$ donne l'hexagone de Herbrand suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^0(G, \mathcal{R}_L) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(G, \mathcal{J}_L) \arrow[dr] & \\
\mathrm{H}^{-1}(G, \mathcal{C}_L) \arrow[ur] & & & \mathrm{H}^0(G, \mathcal{C}_L) \arrow[dl] \\
 & \mathrm{H}^{-1}(G, \mathcal{J}_L) \arrow[ul] & \mathrm{H}^{-1}(G, \mathcal{R}_L) \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

D'après la proposition 2.3.3, nous avons :

$$\mathrm{H}^i(G, \mathcal{J}_L^S) \simeq \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathrm{H}^i(G_{\mathfrak{P}}, \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}).$$

Par l'axiome du corps des classes local (théorème 2.5.1), nous en déduisons :

$$\mathrm{H}^{-1}(G, \mathcal{J}_L) = 1.$$

Ainsi, il suffit de prouver que l'application de $\mathrm{H}^0(G, \mathcal{R}_L)$ dans $\mathrm{H}^0(G, \mathcal{J}_L)$ est injective : c'est une conséquence du théorème ℓ-adique de la norme de Hasse (théorème 2.3.4).

Il suit donc

$$\mathrm{H}^1(G(L/K), \mathcal{C}_L) = 1.$$

□

Théorème 2.3.4. ***(Le théorème ℓ-adique de la norme de Hasse)*** *Si L/K est une ℓ-extension cyclique de degré ℓ^n, un élément du ℓ-groupe des idèles principaux est une norme globale dans L/Ksi et seulement si c'est une norme locale partout, i.e une norme pour chaque complétion $L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$.*

Démonstration. Soit x un idèle principal tel que $x = N_{L/K}(y)$ où $y \in \mathcal{R}_L$. Puisque $\mathcal{R}_L$ s'injecte dans $\mathcal{J}_L$, qui se surjecte dans $\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$, nous en déduisons que x est une norme locale partout.

Réciproquement supposons que $x \in \mathcal{R}_K$ et écrivons le sous la forme $x = \bar{x}.y^{\ell^n}$, où $\bar{x}$ désigne l'image de x dans $K^\times/K^{\times^{\ell^n}} \simeq \mathcal{R}_K/\mathcal{R}_K^{\ell^n}$. Comme L/K est une extension cyclique de ℓ^n, y^{ℓ^n} est une norme. De plus, par hypothèse x est une norme locale partout ; ce qui signifie que chaque composante $\bar{x}_{\mathfrak{p}}$, pour $\mathfrak{p}$ donné, est une norme. En utilisant le théorème usuel de la norme de Hasse, nous concluons que x est une norme. □

2.3.4 G et le G-module

Soit G le groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$. Le G-module est l'union des ℓ-groupes des classes $\mathcal{C}_K$ où K parcourt les extensions finies de K : $\bigcup_{[K:\mathbb{Q}]<\infty} \mathcal{C}_K$ et $\mathcal{C}_L$ est le Gal(L/K)-module.

2.3.5 deg : $G \mapsto \mathbb{Z}_\ell$

Nous fixons un isomorphisme tel que : $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_\ell$. Cela permet de définir :

$$\begin{array}{rccl} \deg & : & G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{Z}_\ell \\ & & \phi & \mapsto & \phi_{|_{\tilde{\mathbb{Q}}}} \end{array}$$

Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie, nous définissons : $f_K = [K \cap \tilde{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}]$ et obtenons par analogie avec le cas local, un homomorphisme surjectif $\deg_K = \frac{1}{f_K} \cdot \deg$ tel que $\deg_K :\ G_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$.

2.3.6 La valuation

La définition de la valuation dans le contexte globale est beaucoup moins spontanée que dans le cas local.

Définition 8. *Soit L/K une ℓ-extension abélienne finie, nous définissons alors l'application :*

$$[\,\cdot\,, L/K] = \prod_{\mathfrak{p}} (\alpha_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}) \text{ pour } \alpha \in \mathcal{J}_K$$

où $L_{\mathfrak{p}}$ désigne la complétion de $K_{\mathfrak{p}}$ par rapport à $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ et $(\alpha_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})$ le symbole local.

Proposition 2.3.5. *Soit L/K et L'/K' des ℓ-extensions abéliennes finies de corps de nombres tels que$K \subseteq K'$ et $L \subseteq L'$, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_{K'} & \xrightarrow{[\,\cdot\,, L'/K']} & \mathrm{Gal}(L'/K') \\ {\scriptstyle N_{K'/K}}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{J}_K & \xrightarrow{[\,\cdot\,, L/K]} & \mathrm{Gal}(L/K) \end{array}$$

Démonstration. Considérons $\alpha = (\alpha_{\mathfrak{P}}) \in \mathcal{J}_{K'}$. Nous avons pour $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$: $(\alpha_{\mathfrak{P}}, L'_{\mathfrak{P}}/K'_{\mathfrak{P}})_{|L_{\mathfrak{p}}} = (N_{K'_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\alpha_{\mathfrak{P}}), L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})$ et

$$[N_{K'/K}(\alpha), L/K] = \prod_{\mathfrak{p}} (N_{K'/K}(\alpha)_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}) = \prod_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} (N_{K'_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\alpha_{\mathfrak{P}}), L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}})$$

ainsi

$$[N_{K'/K}(\alpha), L/K] = \prod_{\mathfrak{P}} (\alpha_{\mathfrak{P}}, L'_{\mathfrak{P}}/K'_{\mathfrak{P}})_{/L} = [\alpha, L'/K']_{|L}.$$

□

Proposition 2.3.6. *Pour toute racine de l'unité ζ et pour tout $a \in \mathcal{R}_K$ nous avons*

$$[a, (K(\zeta)/K)_\ell] = 1$$

où $(K(\zeta)/K)_\ell$ désigne la projection sur le ℓ-sous-groupe de Sylow de Gal$(K(\zeta)/K)$.

Démonstration. Nous suivons [Ne1, prop 6.3, p. 92]. D'après la proposition précédente : $[N_{K/\mathbb{Q}}(a), (\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell] = [a, (K(\zeta)/K)_\ell]_{|\mathbb{Q}(\zeta)}$. Par conséquent il suffit de montrer la propriété pour $K = \mathbb{Q}$. Mais

$$[a, (\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell]\zeta = \prod_{\mathfrak{p}} (a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p))_\ell.$$

Soit q un nombre premier et ζ une racine q^m-ième de l'unité, avec $q^m \neq 2$. Nous prenons $a \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}}$ et écrivons $a = u_p \cdot p^{v_p(a)}$ où v_p désigne la valuation usuelle normalisée de $\mathbb{Q}_p$. Pour $p \neq q$ et $p \neq \infty$ l'extension $\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p$ est une extension non ramifiée. Le principe fondamental [Ne1, théorème 2.6, p. 25] établit que le symbole local associe l'uniformisante au Frobenius, nous obtenons donc que $(p, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p))_\ell$ correspond à l'automorphisme de Frobenius $\phi_p : \zeta \longrightarrow \zeta^p$. De plus le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathfrak{p}}^{\times} & \xrightarrow{(\,\cdot\,,\mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}))} & \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} & \xrightarrow{(\,\cdot\,,\mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}))_\ell} & \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})_\ell \end{array}$$

où le symbole du haut est le symbole local usuel, et le symbole du bas le symbole local ℓ-adique. Par conséquent, nous en déduisons

$$(a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p)_\ell)\zeta = \zeta^{n_p}$$

avec

$$n_p = \begin{cases} p^{v_p(a)} & \text{pour } p \neq q \text{ et } p \neq \infty \\ u_p^{-1} & \text{pour } p = q \\ sgn(a) & \text{pour } p = \infty \ . \end{cases}$$

Ainsi

$$[a, (\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell]\zeta = \prod_{\mathfrak{p}} (a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p)_\ell) = \zeta^\alpha.$$

Et par la formule du produit, $\alpha = \prod_p n_p = sgn(a) \cdot \prod_{p\neq\infty} p^{v_p(a)} \cdot a^{-1} = 1$. □

Définition 9. *Nous définissons la valuation $v_K : \mathcal{C}_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ comme suit :*

$$\mathcal{C}_K \xrightarrow{[\,\cdot\,,\tilde{K}/K]} G(\tilde{K}/K) \xrightarrow{deg_K} \mathbb{Z}_\ell.$$

Lemme 2.3.3. *v_K est bien définie.*

Démonstration. Nous montrons que $\forall a \in \mathcal{R}_K$, $[a, \tilde{K}/K] = 1$. Comme $\tilde{K}/K$ est contenue dans l'extension de K obtenue en ajoutant toutes les racines de l'unité, il suffit de montrer que pour $a \in \mathcal{R}_K$ et ζ une racine de l'unité, $[a, (K(\zeta)/K)_\ell] = 1$, c'est le sens de la proposition 2.3.6. Par suite, nous en déduisons que $\mathcal{R}_K \subseteq \mathrm{Ker}([\,\cdot\,, \tilde{K}/K])$. □

Lemme 2.3.4. *v_K est surjective et $[\mathcal{C}_K, Gal(\tilde{K}/K)]$ est fermé dans $Gal(\tilde{K}/K)$.*

Démonstration. Comme $[\mathcal{R}_K, \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)] = 1$, nous savons que

$$[\mathcal{J}_K, \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)] = [\mathcal{C}_K, \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)].$$

Soit $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/L)$ un voisinage de l'élément neutre $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$, où L est une extension Galoisienne finie de K de degré ℓ^n. Comme $\mathcal{J}_K = \mathcal{U}_K \times \oplus \pi_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{Z}_\ell}$ où $\mathcal{U}_K$ est le sous-groupe des idèles unités, un voisinage de l'élément neutre est du type : $\mathcal{U}_K' \times \oplus \pi_{\mathfrak{p}}^{\ell^{k_\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell}$ avec $\mathcal{U}_K'$ un sous-module ouvert de $\mathcal{U}_K$ et $k_\mathfrak{p}$ un entier. Nous pouvons choisir $k_\mathfrak{p} > n$. Ainsi l'image de $\pi_{\mathfrak{p}}^{\ell^{k_\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell}$ est triviale par le symbole local. De plus si $\mathfrak{p} \mid \ell$ alors l'extension locale est non ramifiée et ainsi l' image d'un élément de $\mathcal{U}_K'$ est triviale. Si $\mathfrak{p} \nmid \ell$ la filtration du groupe des unités permet d'obtenir une image triviale. Par conséquent, l'application $[\,\cdot\,, \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)] : \mathcal{J}_K \mapsto \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ est continue, or $\mathcal{C}_K$ est compact, nous en déduisons donc que $[\mathcal{C}_K, \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)]$ est fermé dans $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$. □

Lemme 2.3.5. *$[\mathcal{C}_K, Gal(\tilde{K}/K)]$ est dense dans $Gal(\tilde{K}/K)$.*

Démonstration. Nous suivons [Ne1, proposition 6.4, p. 93] . Le symbole local est surjectif, $[\mathcal{J}_K, \mathrm{Gal}(L/K)]$ contient tous les sous-groupes de décomposition $\mathrm{Gal}(L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p})$. Donc toutes les places $\mathfrak{p}$ se décomposent complètement dans le sous-corps des points fixes M de $[\mathcal{J}_K, \mathrm{Gal}(L/K)]$. Cela implique que $M = K$ et donc que $[\mathcal{J}_K, \mathrm{Gal}(L/K)] = \mathrm{Gal}(L/K)$: $[\mathcal{J}_K, \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)]$ est ainsi dense dans $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$. Nous obtenons donc que $[\mathcal{J}_K, \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)] = [\mathcal{C}_K, \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)]$ est dense dans $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$. □

Lemme 2.3.6. *v_K est hensélienne par rapport au degré deg.*

Démonstration. Nous avons :

$$v_K(N_{L/K}\mathcal{C}_L) = v_K(N_{L/K}\mathcal{J}_L) = deg_K \circ [N_{L/K}\mathcal{J}_L, \tilde{K}/K]$$

(puisque $[\mathcal{R}_K,\ \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)] = 1$). De plus $deg_K = \frac{1}{f_K} \cdot deg$ et $f_{L/K} = f_L/f_K$, c'est pourquoi $deg_K = f_{L/K} \cdot deg_L$. D'après la proposition 3.6.1, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}_{L'} & \xrightarrow{[\,\cdot\ \tilde{L}/L]} & \mathrm{Gal}(\tilde{L}/L) \\ {\scriptstyle N_{L/K}}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{J}_K & \xrightarrow{[\,\cdot\ \tilde{K}/K]} & \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K) \end{array}$$

. Il suit que $[N_{L/K}\mathcal{J}_L, \tilde{K}/K] = [\mathcal{J}_L, \tilde{L}/L]$. Par la surjectivité de v_L, nous en déduisons que

$$v_K(N_{L/K}\mathcal{C}_L) = f_{L/K} \cdot deg_L \circ [\mathcal{J}_L, \tilde{L}/L] = f_{L/K} \cdot v_L(\mathcal{C}_L) = f_{L/K} \cdot \mathbb{Z}_\ell$$

□

Corollaire 5. *v_K est bien définie, surjective et hensélienne par rapport au degré deg.*

Corollaire 6. *(deg, v) est un couple de corps des classes, et $A_K := \mathcal{C}_K$ satisfait l'axiome du corps des classes. Ainsi pour toute ℓ-extension abélienne finie d'un corps de nombre K, $r_{L/K}$ induit un isomorphisme :*

$$Gal(L/K) \simeq \mathcal{C}_K / N_{L/K}\mathcal{C}_L.$$

Définition 10. *L'application réciproque de $r_{L/K}$ conduit à un homomorphisme surjectif*

$$(\ ,L/K) : \mathcal{C}_K \longrightarrow Gal(L/K)$$

, de noyau $N_{L/K}\mathcal{C}_L$. le symbole ℓ-adique global de la norme résiduelle. Nous considérons $(\ ,L/K)$ aussi comme homomorphisme de $\mathcal{J}_K \longrightarrow Gal(L/K)$ du ℓ-groupe des idèles.

Proposition 2.3.7. *Si L/K est une ℓ-extension abélienne et $\mathfrak{p}$ une place de K, alors le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} & \xrightarrow{(\ \cdot\ ,L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p})} & Gal(L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}) \\ {\scriptstyle [\ \ ]}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_K & \xrightarrow{(\ \cdot\ ,L/K)} & Gal(L/K) \end{array}$$

est commutatif, où pour toute place $\mathfrak{p}$ de K, $[\ \ ]$ désigne l'injection canonique de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{C}_K$, qui associe à chaque $a_\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ la classe de l'idèle $[a_\mathfrak{p}] = (..., 1, 1, 1, a_\mathfrak{p}, 1, 1, 1, ...)$.

Démonstration. Nous suivons ici la preuve du cas classique, se référer à [Ne1, proposition IV 6.6]. Nous remarquons d'abord que les deux applications $(\ \ ,\tilde{K}/K)$, $[\ \ ,\tilde{K}/K]$ de $\mathcal{J}_K$ dans $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ coïncident, puisque d'après [Ne1, proposition II3.4]

$$\deg_K \circ (\ \ ,\tilde{K}/K) = v_K = \deg_K \circ [\ \ ,\tilde{K}/K].$$

Par suite, si L/K est une sous-extension de $\tilde{K}/K$ et $\alpha = (\alpha_\mathfrak{p}) \in \mathcal{J}_K$ alors

$$(\alpha, L/K) = [\alpha, L/K] = \prod_\mathfrak{p} (\alpha_\mathfrak{p}, L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}).$$

En particulier, si $a_\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$, alors $([a_\mathfrak{p}], L/K) = (a_\mathfrak{p}, L/K)$ prouvant la proposition pour les sous-extensions de $\tilde{K}/K$. Pour le cas général, soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p})$. Nous pouvons choisir un antécédent $\tilde{\sigma}$ de σ dans $\tilde{L_\mathfrak{p}} = L_\mathfrak{p}.\tilde{L}$, de telle sorte que la restriction $\tilde{\sigma}|\tilde{K}$ soit une puissance de ϕ_K, i.e que $\tilde{\sigma}|\tilde{L}$ soit un relèvement de Frobenius pour $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Soit Σ le corps des points fixes de $\tilde{\sigma}|\tilde{L}$ et $\Sigma_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p}.\Sigma$ sa complétion. Alors, σ est l'image de $\tilde{\sigma}$ par $\mathrm{Gal}(\tilde{L_\mathfrak{p}}/\Sigma_\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p})$. En posant $M = \Sigma.L$ nous avons que M/Σ est une sous-extension de $\tilde{\Sigma}/\Sigma$ puisque $\tilde{\Sigma} = \tilde{L}$, et nous obtenons comme dans [Ne1, proposition IV 6.6] le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(M_\mathfrak{p}/\Sigma_\mathfrak{p}) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \mathcal{R}_{\Sigma_\mathfrak{p}}/N_{M_\mathfrak{p}/\Sigma_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{M_\mathfrak{p}} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \mathrm{Gal}(L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}/N_{L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{L_\mathfrak{p}} \arrow[dd] \\
\mathrm{Gal}(M/\Sigma) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{J}_\Sigma/N_{M/\Sigma}\mathcal{J}_M\mathcal{R}_\Sigma \arrow[dr] & \\
& \mathrm{Gal}(L/K) \arrow[rr] & & \mathcal{J}_K/N_{L/K}\mathcal{J}_L\mathcal{R}_K
\end{tikzcd}
$$

dans lequel les applications horizontales sont les applications de réciprocité. Dans ce diagramme, le haut et le bas sont commutatifs. Les diagrammes sur le côté sont commutatifs ainsi que le diagramme à l'arrière d'après ce que nous venons de voir, M/Σ étant une sous-extension de $\tilde{\Sigma}/\Sigma$. Rappelant que σ est l'image de $\mathrm{Gal}(M_\mathfrak{p}/\Sigma_\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p})$ nous en concluons que le diagramme de devant est commutatif, ce qui prouve la proposition.

□

Corollaire 7. *Soit L/K une ℓ-extension abélienne, $\alpha = (\alpha_\mathfrak{p}) \in \mathcal{J}_K$ alors*

$$(\alpha, L/K) = \prod_{\mathfrak{p}} (\alpha_\mathfrak{p}, L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}).$$

En particulier, si $a \in \mathcal{R}_K$, nous avons la formule du produit

$$\prod_{\mathfrak{p}} (a, L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}) = 1.$$

Démonstration. Puisque $\mathcal{J}_K$ est topologiquement généré par des éléments de la forme $\alpha = [a_\mathfrak{p}]$, qui est la notation pour la classe de $(..., 1, 1, 1, a_\mathfrak{p}, 1, 1, 1, ...)$ où $a_\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$, il suffit de démontrer la formule pour des éléments de ce type. Mais c'est exactement la proposition précédente :

$$([a_\mathfrak{p}], L/K) = (a_\mathfrak{p}, L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}) = \prod_{\mathfrak{q}} ([a_\mathfrak{p}], L_\mathfrak{q}/K_\mathfrak{q}).$$

La formule du produit s'en déduit puisque $(\alpha, L/K)$ ne dépend que de la classe de α. □

En identifiant $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$ avec son image dans $\mathcal{C}_K$ sous l'application $a_\mathfrak{p} \longrightarrow [a_\mathfrak{p}]$ et en écrivant $N = N_{L/K}$ et $N_\mathfrak{p} = N_{L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}}$ nous obtenons

Corollaire 8. *Pour toute ℓ-extension abélienne finie L/K, nous avons :*

$$N\mathcal{C}_L \cap \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} = N_\mathfrak{p}\mathcal{R}_{L_\mathfrak{p}}.$$

Démonstration. Soit $x_\mathfrak{p} \in N_\mathfrak{p}\mathcal{R}_{L_\mathfrak{p}}$, d'après la proposition précédente, nous avons $([x_\mathfrak{p}], L/K) = (x_\mathfrak{p}, L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}) = 1$, de telle sorte que la classe de $[x_\mathfrak{p}]$ est contenue dans $N\mathcal{C}_L$, d'où $N_\mathfrak{p}\mathcal{R}_{L_\mathfrak{p}} \subseteq N\mathcal{C}_L$. Réciproquement, considérons $\bar{\alpha} \in N\mathcal{C}_L \cap \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$. Alors $\bar{\alpha}$ est représenté par la norme d'un idèle : $\alpha = N\beta$ avec $\beta \in \mathcal{J}_L$, mais aussi par un élément $[x_\mathfrak{p}]$, $x_\mathfrak{p} \in \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$, tel que $[x_\mathfrak{p}] \cdot a = N\beta$ avec $a \in \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$. En prenant les composantes, nous voyons que a est une norme de $L_\mathfrak{q}/K_\mathfrak{q}$ pour tout $\mathfrak{q} \not\equiv \mathfrak{p}$. De part la formule du produit, il suit que a doit être une norme de $L_\mathfrak{p}/K_\mathfrak{p}$, de telle sorte que $[x_\mathfrak{p}] \in N_\mathfrak{p}\mathcal{R}_{L_\mathfrak{p}}$: prouvant l'inclusion $N\mathcal{C}_L \cap \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \subseteq N_\mathfrak{p}\mathcal{R}_{L_\mathfrak{p}}$. □

Théorème 2.3.5. *La correspondance 1-1 :*

L'application

$$L \longrightarrow \mathcal{N}_L = N_{L/K}\mathcal{C}_L$$

établit une correspondance bijective entre les ℓ-extensions abéliennes finies L/K et les sous-groupes ouverts $\mathcal{N}$ de $\mathcal{C}_K$. Si L est associé au sous-groupe ouvert $\mathcal{N}_L$ de $\mathcal{C}_K$ alors L est appelé le corps des classes de N et nous avons :

$$Gal(L/K) \simeq \mathcal{C}_K/N_{L/K}\mathcal{C}_L$$

De plus, $L_1 \subset L_2 \Rightarrow \mathcal{N}_{L_2} \subset \mathcal{N}_{L_1}$ $\mathcal{N}_{L_1L_2} = \mathcal{N}_{L_1} \cap \mathcal{N}_{L_2}$ $\mathcal{N}_{L_1 \cap L_2} = \mathcal{N}_{L_1}\mathcal{N}_{L_2}$.

Démonstration. D'après [Ne1, theorem II4.2], nous devons montrer que les sous-modules $\mathcal{N}$ de $\mathcal{C}_K$ qui sont ouverts pour la topologie de la norme sont précisément les sous-modules fermés d'indice fini de $\mathcal{C}_K$. Si $\mathcal{N}$ est ouvert pour la topologie de la norme, il contient donc par définition un groupe des normes du type $N_{L/K}(\mathcal{C}_L)$ et est donc d'indice fini puisque $(\mathcal{C}_K : N_{L/K}(\mathcal{C}_L) = [L : K]$ d'après le corollaire 4. $\mathcal{N}$ est aussi fermé pour sa topologie naturelle, car $N_{L/K}\mathcal{C}_L$ l'est. ($\mathcal{C}_L$ est compact pour sa topologie naturelle). Réciproquement, soit $\mathcal{N}$ un sous-groupe fermé d'indice fini n dans $\mathcal{C}_K$ muni de sa topologie naturelle. Nous devons alors montrer que $\mathcal{N}$ est ouvert pour la topologie de la norme, à savoir qu'il contient un sous-groupe des normes $N_{L/K}\mathcal{C}_L$. Considérons l'application identité de $\mathcal{C}_K$ muni de sa topologie usuelle, dans $\mathcal{C}_K$ muni de la topologie de la norme. Nous venons juste de prouver que la topologie usuelle est plus fine que la topologie de la norme. Il suit alors que l'identité est une bijection continue. De plus $\mathcal{C}_K$ est compact pour sa topologie naturelle, et vérifie la propriété : $\cap_{L/K}N_{L/K}\mathcal{C}_L = 1$ car $\cap_{L_\mathfrak{P}}N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}} = 1$, conséquence de la trivialité du groupe des normes universelles. De part la [Ne1, proposition II4.1 iv)], nous en déduisons que $\mathcal{C}_K$ est de Hausdorff pour la topologie de la norme. Finalement, l'identité est un homéomorphisme, et $\mathcal{N}$ est ouvert pour la topologie de la norme.

□

3 Le Frobenius logarithmique

3.1 Le cas logarithmique local

Après avoir rappelé la notion de ramification au sens logarithmique introduite par Jaulent, nous détaillons le G-module, l'application degré et la valuation logarithmique dans le contexte local.

3.1.1 La construction de la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique et de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{Q}_p$

Sur le corps $\mathbb{Q}$, il existe précisément une $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension décrite dans la proposition suivante :

Proposition 3.1.1. *[Ne1, proposition IV 6.2]*
Soit $\Omega/\mathbb{Q}$ le corps généré par toutes les racines de l'unité et soit T le sous-groupe de torsion de $Gal(\Omega/\mathbb{Q})$, (le sous-groupe des éléments d'ordre fini). Alors le sous-corps de Ω, $\widehat{\mathbb{Q}}^c/\mathbb{Q}$ fixé par T correspond à la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension de $\mathbb{Q}$.

Neukirch donne une description alternative de la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension obtenue comme suit : pour chaque premier p soit $\Omega_p/\mathbb{Q}$ le corps obtenu par addition des racines de l'unité d'ordre une puissance de p. Alors

$$\mathrm{Gal}(\Omega_p/\mathbb{Q}) \simeq \varprojlim_n \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}) \simeq \varprojlim_n (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}_p^\times$$

et $\mathbb{Z}_p^\times \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ pour $p \neq 2$ et $\mathbb{Z}_2^\times \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En prenant le corps de points fixes du sous-groupe de torsion de $\mathrm{Gal}(\Omega_p/\mathbb{Q})$ qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $p = 2$) nous obtenons alors une extension $\mathbb{Q}^{(p)}$ de groupe de Galois :

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_p$$

il s'agit de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$. Alors, $\widehat{\mathbb{Q}}^c$ est le compositum de toutes les $\mathbb{Z}_p$-extensions cyclotomiques de $\mathbb{Q}$ pour tous les premiers p.

Remarque :

Ainsi la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$ est obtenue comme le compositum de $\mathbb{Q}_p$ et de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$. Soit q un autre nombre premier, la $\mathbb{Z}_q$-extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et la cyclotomique coïncident pour $q \neq p$, se reporter à [Ja3, théorème 1.4 ii)].

3.1.2 Ramification logarithmique

Soit K un corps de nombres, p un nombre premier, $\mathfrak{p}$ un premier de K au dessus de p. Nous notons $\widehat{\mathbb{Q}_p^c}$ la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$, i.e le compositum de toutes les $\mathbb{Z}_q$-extensions cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$ pour tous les nombres premiers q.

Définition 11. *Indices absolus :*

i) l'indice logarithmique de ramification absolu de $\mathfrak{p}$ est défini par :

$$\tilde{e}_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} : \hat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c \cap K_{\mathfrak{p}}].$$

ii) le degré d'inertie logarithmique de $\mathfrak{p}$ est :

$$\tilde{f}_{\mathfrak{p}} = [\hat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c \cap K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}].$$

iii)$K/\mathbb{Q}$ est dite logarithmiquement non ramifiée en $\mathfrak{p}$ si $\tilde{e}_{\mathfrak{p}} = 1$, ce qui signifie $K_{\mathfrak{p}} \subseteq \widehat{\mathbb{Q}_p^c}$.

iv) $\mathfrak{p}$ est dite totalement log-décomposée si $\tilde{e}_{\mathfrak{p}} = 1$ et $K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_p$ i.e le sous-groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$ est trivial.

v) $\mathfrak{p}$ est dite logarithmiquement log-inerte si $\tilde{e}_{\mathfrak{p}} = 1$ et $[K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p] = [K : \mathbb{Q}]$.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{Q}_p^c} \arrow[d, dash] & \\
\hat{\mathbb{Q}}_{\mathfrak{p}}^c \cap K_{\mathfrak{p}} \arrow[r, dash, "\tilde{e}_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, dash, "\tilde{f}_{\mathfrak{p}}"] & K_{\mathfrak{p}} \\
\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} &
\end{tikzcd}$$

Remarque fondamentale : [Ja3, p.4]

Supposons que $K/\mathbb{Q}$ soit une ℓ-extension finie, ainsi il existe n tel que $[K : \mathbb{Q}] = \ell^n$. Alors l'extension $\widehat{\mathbb{Q}_p^c}/\mathbb{Q}_p^c$ contient uniquement des sous-extensions de degré premier à ℓ. En particulier le degré $[\widehat{\mathbb{Q}_p^c} \cap K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}}]$ est premier à ℓ et comme il divise ℓ^n, nous en déduisons que $[\widehat{\mathbb{Q}_p^c} \cap K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}}] = 1$. L'égalité des corps $\widehat{\mathbb{Q}_p^c} \cap K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}}$ implique les caractérisations suivantes :

$$\tilde{e}_{\mathfrak{p}} = 1 \Leftrightarrow K_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathbb{Q}_p^c$$

et

$$\tilde{f}_{\mathfrak{p}} = 1 \Leftrightarrow \mathbb{Q}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_p^c.$$

Comme $\mathbb{Q}_p^c/\mathbb{Q}_p$ est une extension Galoisienne, la condition précédente implique que les extensions $K_{\mathfrak{p}}$ et $\mathbb{Q}_p^c$ sont linéairement disjointes sur $\mathbb{Q}_p$.

Comme nous travaillons uniquement avec des ℓ-extensions, les définitions que nous donnons dans la sous-section contexte logarithmique sont celles obtenues en remplaçant $\widehat{\mathbb{Q}_p^c}$ par $\mathbb{Q}_p^c$.

Ainsi nous avons le schéma suivant : [Bri, 1.1.3]

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}_p^c \arrow[rr, dash, "\prod_{q\neq\ell}\mathbb{Z}_q"] \arrow[d, dash] & & \widehat{\mathbb{Q}_p^c} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \widehat{K_{\mathfrak{p}}^c} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Q}_p \arrow[r, dash, "\tilde{f}_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}_p^c \cap K_{\mathfrak{p}} \arrow[rr, equal] & & \widehat{\mathbb{Q}_p^c} \cap K_{\mathfrak{p}} \arrow[r, dash, "\tilde{e}_{\mathfrak{p}}"] & K_{\mathfrak{p}} \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Q} \arrow[rrrr, dash] & & & & K
\end{tikzcd}$$

Définition 12. *Indices relatifs :*

Soit L/K une extension finie de corps de nombres, $\mathfrak{P}$ un premier de L au dessus de $\mathfrak{p}$. Notons $\widehat{K_{\mathfrak{p}}^c}$ le compositum de $K_{\mathfrak{p}}$ et de $\widehat{\mathbb{Q}_p^c}$,

i)l'indice relatif de ramification logarithmique de $\mathfrak{p}$ est :

$$\tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = [L_{\mathfrak{P}} : \hat{K_{\mathfrak{p}}^c} \cap L_{\mathfrak{P}}].$$

ii) le degré d'inertie relatif logarithmique de $\mathfrak{p}$ est :

$$\tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = [\widehat{K_{\mathfrak{p}}^c} \cap L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}].$$

iii)L/K est dite logarithmiquement non ramifiée en $\mathfrak{p}$ lorsque $\tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = 1$, ce qui implique $L_{\mathfrak{P}} \subseteq \widehat{K_{\mathfrak{p}}^c}$.

Nous avons le schéma suivant : [Bri, 1.1.3]

$$\begin{tikzcd}
 & & & L_{\mathfrak{P}} \\
 & L_{\mathfrak{P}} \cap \widehat{\mathbb{Q}_p^c} \arrow[urr, dash, "\tilde{f}_{\mathfrak{P}}"] \arrow[rr, dash, "\tilde{e}_{\mathfrak{p}}"] \arrow[d, dash] & & \widehat{K_{\mathfrak{p}}^c} \cap L_{\mathfrak{P}} \arrow[u, dash, "\tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}"'] \\
\mathbb{Q}_p \arrow[ur, dash, "\tilde{e}_{\mathfrak{P}}"] \arrow[r, dash, "\tilde{f}_{\mathfrak{p}}"] & K_{\mathfrak{p}} \cap \widehat{\mathbb{Q}_p^c} \arrow[rr, dash, "\tilde{e}_{\mathfrak{p}}"] & & K_{\mathfrak{p}} \arrow[u, dash, "\tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}"']
\end{tikzcd}$$

et les relations :

$$\tilde{e}_{\mathfrak{P}} = \tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}.\tilde{e}_{\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad \tilde{f}_{\mathfrak{P}} = \tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}.\tilde{f}_{\mathfrak{p}}.$$

Proposition 3.1.2. *[Ja3, theorem 1.4] Avec les notations précédentes, les indices classiques et logarithmiques sont liés par la formule :*

$$\tilde{e}_{\mathfrak{p}}.\tilde{f}_{\mathfrak{p}} = e_{\mathfrak{p}}.f_{\mathfrak{p}}.$$

3.1.3 Le contexte logarithmique local :

Nous considérons le contexte suivant :

$K_{\mathfrak{p}}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$,

$\mathbb{Q}_p^c$ est la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$

$\mathbb{Q}_p^{ab}$ est la pro-ℓ-extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}_p^{ab} \\ | \\ \mathbb{Q}_p^c \\ | \\ \mathbb{Q}_p \end{array}$$

Par rapport à la partie précédente, ici nous remplaçons la $\mathbb{Z}_\ell$-extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ par sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique, et la valuation usuelle de $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$ par la valuation logarithmique, introduite par Jaulent dans [Ja3]. Or si p est un nombre premier différent de ℓ, la $\mathbb{Z}_\ell$-extension non ramifiée et la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique coïncident, et il en est de même pour la valuation classique et logarithmique. La seule différence pour $\mathbb{Q}_p$ va donc se produire dans le cas où $p = \ell$.

De façon générale, pour un corps local $K_{\mathfrak{p}}$, nous remplaçons aussi sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension non ramifiée par sa $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique, et la valuation usuelle de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ par la valuation logarithmique : les différences par rapport au contexte local précédent vont donc apparaitre pour les places au dessus de ℓ.

Le but est de de montrer que le contexte logarithmique peut aussi être compris grâce à la théorie abstraite de Neukirch. Ainsi nous sommes en mesure de définir pour une ℓ-extension locale un symbole local logarithmique qui ne diffère du symbole local ℓ-adique que pour les places $\mathfrak{p}$ au dessus de ℓ. L'intérêt réside dans le fait que nous sommes alors en mesure de définir un Frobenius logarithmique associé au contexte de la ramification logarithmique : ce dernier coïncide avec le Frobenius classique sauf pour les places au dessus de ℓ : cela permet donc d'étendre la théorie à des places $\mathfrak{p}$, au dessus de ℓ ramifiées au sens classique, mais non ramifiées au sens logarithmique. D'autre part la définition du Frobenius logarithmique associé à une place $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres K, logarithmiquement non ramifiée, conduit à définir une application d'Artin logarithmique sur l'ensemble des diviseurs logarithmiques. Nous en étudions les propriétés et explicitons son noyau.

3.1.4 L'application degré

Nous posons $q = p$ (respectivement $q = 4$) si $p \neq 2$ (respectivement $p = 2$) et nous considérons le caractère de Teichmuller ω défini comme l'unique caractère de Dirichlet modulo q tel que $\frac{x}{\omega(x)} \equiv 1 \bmod q$ pour tout x premier à p. L'application $x \longrightarrow \omega(x)$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}_p^\times$ dans le groupe des racines de l'unité contenue dans $\mathbb{Q}_p$. Le caractère de Teichmuller est bien défini pour les pro-ℓ-extensions comme la restriction à la pro-ℓ-partie du caractère tout entier.

Nous définissons alors l'application degré par le caractère de Teichmuller :

$$\begin{array}{ccccc} \deg & : & G = \mathrm{Gal}(K_\mathfrak{p}^{ab}/K_\mathfrak{p}) & \to & \mathbb{Z}_\ell \\ & & \phi & \mapsto & \omega(\phi) \end{array}$$

où $K_\mathfrak{p}^{ab}$ désigne la pro-ℓ-extension abélienne maximale de $K_\mathfrak{p}$.

Nous suivons alors la construction abstraite de Neukirch et considérons le schéma de la ramification qui lui est associé, avec $\hat{K_\mathfrak{p}^c}$ joue ici le rôle du $\tilde{k}$ de la partie abstraite, et $K_\mathfrak{p}$ celui de k par rapport au schéma abstrait (item 11 p.11).

$$\begin{tikzcd} K_\mathfrak{p}^c \arrow[d, no head] & \\ K_\mathfrak{p}^c \cap L_\mathfrak{P} \arrow[r, no head, "\tilde{e}"] \arrow[d, no head, "\tilde{f}"] & L_\mathfrak{P} \\ K_\mathfrak{p} & \end{tikzcd}$$

Pour $L_\mathfrak{P}$ une ℓ-extension finie de $K_\mathfrak{p}$, l'indice de ramification logarithmique et le degré d'inertie logarithmique apparaissent donc naturellement, respectivement définis par :

$$\tilde{f}_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} = [L_\mathfrak{P} \cap K_\mathfrak{p}^c : K_\mathfrak{p}] \qquad \tilde{e}_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} = [L_\mathfrak{P} : L_\mathfrak{P} \cap K_\mathfrak{p}^c].$$

Ces définitions coïncident bien avec celles données par Jaulent [Ja3] puisque nous travaillons avec des ℓ-extensions ainsi nous avons pu remplacer $\hat{K_\mathfrak{p}^c}$ par $K_\mathfrak{p}^c$ en vertu de la remarque fondamentale p.38.

3.1.5 Le G-module

Le G-module est le même que précédemment à savoir :

$$A = \varinjlim_{L_\mathfrak{P}} \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}$$

où $L_\mathfrak{P}$ parcourt les extensions finies de $K_\mathfrak{p}$, with $\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}} = \varprojlim_k L_\mathfrak{P}^\times / L_\mathfrak{P}^{\times \ell^k}$.

Il s'identifie canoniquement à :

$$A = \bigcup_{[L_{\mathfrak{P}}:K_{\mathfrak{p}}]<\infty} \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}.$$

Si $L_{\mathfrak{P}}$ est une extension finie de $K_{\mathfrak{p}}$

$$A_{L_{\mathfrak{P}}} = \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$$

est le $Gal(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})$-module que nous allons étudier.

3.1.6 Valuation logarithmique

Nous introduisons dans cette section la valuation logarithmique définie par Jaulent.

Définition 13. *Le logarithme d'Iwasawa [Ja3, §1]*

Le logarithme d'Iwasawa Log_{Iw} est défini sur le groupe des unités principales $1 + \ell\mathbb{Z}_\ell$ de $\mathbb{Z}_\ell$ par son développement en série entière :

$$Log(1+x) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} x^k/k.$$

Il se prolonge classiquement à $\mathbb{Z}_\ell^\times$ au moyen de l'équation fonctionnelle

$$Log(xy) = Log(x)Log(y)$$

qui impose la condition $Log(\zeta) = 0$ pour toute racine de l'unité ζ dans $\mathbb{Z}_\ell^\times$ et finalement au groupe $\mathbb{Q}_\ell^\times$ tout entier avec la condition $Log(\ell) = 0$.

Définition 14. *La valuation logarithmique [Ja3, proposition 1.2]*

Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}$, p un nombre premier. Notons $\widehat{\mathbb{Q}_p^c}$ la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathfrak{p}$ une place de K au dessus de p,

i) le degré ℓ-adique de p est donné par la formule :

$$deg_\ell(p) = \begin{cases} Log_{Iw}(p) & si\ p \neq \ell \\ Log_{Iw}(1+\ell) & si\ p = \ell \end{cases}$$

Ce choix impose, comme c'est détaillé ci-après, l'uniformisante logarithmique sur $\mathbb{Q}_\ell$.

ii)le degré ℓ-adique de $\mathfrak{p}$ est défini par la formule :

$$deg(\mathfrak{p}) = \tilde{f}_{\mathfrak{p}} \cdot deg_\ell(p).$$

iii) la valuation logarithmique associée à $\mathfrak{p}$ est :

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(x) = Log_{Iw}(N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p}(x))/deg(\mathfrak{p})$$

définie sur $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$.

Remarque : La définition de la valuation logarithmique diffère de celle donnée par Jaulent : en fait l'expression du degré ℓ-adique $\deg_\ell(\ell)$ est ℓ dans la définition initiale[Ja3, proposition 1.2] et $Log_{Iw}(1+\ell)$ dans notre cas. Le choix fait impose l'uniformisante logarithmique.

Définition 15. *Valeur absolue ℓ-adique principale [Ja3, proposition 1.2]*

Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}$, p un nombre premier.

Si $v_\mathfrak{p}$ désigne la valuation usuelle normalisée de $K_\mathfrak{p}$, la valeur absolue ℓ-adique principale est définie sur $K_\mathfrak{p}^\times$ par la formule :

$$\textit{si } \mathfrak{p} \not| \ell \textit{ alors } |x_\mathfrak{p}| = < N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x)} >$$

$$\textit{si } \mathfrak{p}|\ell \textit{ alors } |x_\mathfrak{p}| = < N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}(x) N\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x)} >$$

où N désigne la norme absolue de $\mathfrak{p}$ et où $u \longrightarrow < u >$ désigne la surjection canonique de $\mathbb{Z}_\ell{}^\times$ sur le groupe des unités principales.

Proposition 3.1.3. *Image de la valuation logarithmique [Ja3, proposition 1.2]*

Soit p un nombre premier, $K_\mathfrak{p}$ une extension finie de degré $d_\mathfrak{p}$ sur $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$, et $|.|_\mathfrak{p}$ la valeur absolue ℓ-adique principale sur $K_\mathfrak{p}^\times$:

i) pour tout $x \in K_\mathfrak{p}^\times$ l' expression $h_p(x) = -Log(|x|_\mathfrak{p}/d_\mathfrak{p}.deg_\ell(p)$ ne dépend pas du choix de l'extension de $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ contenant x

ii) la restriction $h_\mathfrak{p}$ de h_p au groupe multiplicatif $K_\mathfrak{p}^\times$, induit un $\mathbb{Z}_\ell$-morphisme de $\mathcal{R}_{K\mathfrak{p}}$ sur $\mathbb{Q}_\ell$, dont le noyau est $\tilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$, et dont l'image est le $\mathbb{Z}_\ell$-réseau $1/\tilde{e}_\mathfrak{p} \cdot \mathbb{Z}_\ell$

iii) la valuation logarithmique satisfait : $\tilde{v}_\mathfrak{p} = \tilde{e}_\mathfrak{p} \cdot h_\mathfrak{p}$.

Proposition 3.1.4. *Valuations logarithmique et usuelle [Ja3, proposition 1.2]*

Dans le même contexte, si $\mathfrak{p}$ est une place qui n'est pas au dessus de ℓ, les valuations classiques et logarithmiques sont proportionnelles sur $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$:

$$\tilde{v}_\mathfrak{p} = \frac{f_\mathfrak{p}}{\tilde{f}_\mathfrak{p}} \cdot v_\mathfrak{p} = \frac{\tilde{e}_\mathfrak{p}}{f_\mathfrak{p}}$$

Proposition 3.1.5. *La valuation logarithmique $\tilde{v}_\mathfrak{p}$ satisfait les deux propriétés :*

(i) $\tilde{v}_\mathfrak{p}(\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}) = Z$ tel que $\mathbb{Z} \subset Z$ et $Z/n.Z \simeq \mathbb{Z}/n.\mathbb{Z}$ pour tout n

(ii)$\tilde{v}_\mathfrak{p}(N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} \mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}) = \tilde{f}_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}.Z$ pour toute extension finie $L_\mathfrak{P}$ de $K_\mathfrak{p}$.

Ainsi la valuation logarithmique est hensélienne par rapport à deg selon la définition de Neukirch.

Démonstration. Pour le premier critère (i) nous utilisons la définition de la valuation logarithmique :

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}) = \mathbb{Z}_\ell$$

ainsi $Z = \mathbb{Z}_\ell$ et $Z/n.Z \simeq \mathbb{Z}/n.\mathbb{Z}$ pour tout n.

Pour le deuxième critère (ii) nous utilisons le diagramme commutatif suivant [Ja3, proposition 1.1]

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathfrak{p}}^{\times} \arrow[r, "extension"] \arrow[d] & L_{\mathfrak{P}}^{\times} \arrow[r, "Norme"] & K_{\mathfrak{p}}^{\times} \arrow[d, "h_{\mathfrak{p}}"] \\
\mathbb{Q}_\ell \arrow[r] & \mathbb{Q}_\ell \arrow[r, "{[L_{\mathfrak{P}}:K_{\mathfrak{p}}]}"] & \mathbb{Q}_\ell
\end{tikzcd}$$

il suit

$$h_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}) = [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}] \cdot h_{\mathfrak{P}}$$

comme,

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = \tilde{e}_{\mathfrak{p}} \cdot h_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})$$

nous

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}] \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{p}} \cdot h_{\mathfrak{P}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})$$

ainsi

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}] \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{p}}/\tilde{e}_{\mathfrak{P}} \cdot \mathbb{Z}_\ell$$

dû à [Ja3, proposition 1.2],

$$h_{\mathfrak{P}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = 1/\tilde{e_{\mathfrak{P}}} \cdot \mathbb{Z}_\ell$$

D'après [proposition 5.1.1] :

$$[L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}] = \tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \cdot \tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}.$$

d'où

$$[L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}] \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{p}}/\tilde{e}_{\mathfrak{P}} = \frac{\tilde{f}_{\mathfrak{P}} \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{P}} \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{p}}}{\tilde{f}_{\mathfrak{p}} \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{p}} \cdot \tilde{e}_{\mathfrak{P}}}$$

ainsi

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = \frac{\tilde{f}_{\mathfrak{P}}}{\tilde{f}_{\mathfrak{p}}} \cdot \mathbb{Z}_\ell$$

finalement

$$\tilde{v}_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}) = \tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} \cdot Z$$

□

3.1.7 Uniformisantes logarithmiques sur $\mathbb{Q}_p$

Proposition 3.1.6. *[Ja3, i), p. 4]*

Pour une place non archimédienne p de $\mathbb{Q}$, nous avons

$$\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p} = \begin{cases} \mu_p.p^{\mathbb{Z}_\ell} & \textit{pour } p \neq \ell \\ (1+\ell\mathbb{Z}_\ell)\cdot \ell^{\mathbb{Z}_\ell} & \textit{pour } p = \ell. \end{cases}$$

Uniformisantes logarithmiques sur $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$:

Si $p \neq \ell$: l'uniformisante classique p est aussi uniformisante pour la valuation logarithmique.

Si $p = \ell$: partant de l'expression de $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_\ell}$, nous avons

$$\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_\ell} = \mathcal{U}_{\mathbb{Q}_\ell}\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}_\ell}$$

avec $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \ell^{\mathbb{Z}_\ell}$ et $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}_\ell} \simeq 1+\ell\mathbb{Z}_\ell$.

Nous considérons alors une uniformisante logarithmique $\tilde{\ell}$ telle que

$$\tilde{v}_\ell(\tilde{\ell}) = 1 \text{ et } \tilde{\ell} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Q}_\ell}.$$

Ainsi nous obtenons la décomposition suivante :

$$\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_\ell} = \tilde{\ell}^{\mathbb{Z}_\ell}\ell^{\mathbb{Z}_\ell}.$$

Sur $\mathbb{Q}_\ell$ **c'est le choix du dénominateur** dans l'expression de la valuation logarithmique, i.e. du degré ℓ-adique de ℓ, qui **impose** $\tilde{\ell}$. La condition $Log(\tilde{\ell}) = \deg_\ell(\ell)$, qui est la traduction de $\tilde{v}_\ell(\tilde{\ell}) = 1$, définit $\tilde{\ell}$ à une unité logarithmique près. Or nous avons $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}_\ell} \cap \mathcal{U}_{\mathbb{Q}_\ell} = 1$, ainsi $\tilde{\ell}$ est bien déterminée par le choix du dénominateur.

Par exemple si nous prenons pour expression du degré ℓ-adique de ℓ la valeur $\mathrm{Log}(1+\ell)$, alors $\tilde{\ell} = 1+\ell$.

3.1.8 Uniformisantes logarithmiques sur $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$

Si $\mathfrak{p} \nmid \ell$, l'uniformisante classique $\pi_\mathfrak{p}$ est aussi uniformisante pour la valuation logarithmique, les deux valuations étant dans ce cas proportionnelles : $\pi_\mathfrak{p} = \tilde{\pi}_\mathfrak{p}$.

Si $\mathfrak{p}|\ell$, alors nous avons dans ce cas $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \simeq U^1_\mathfrak{p}\pi_\mathfrak{p}^{\mathbb{Z}_\ell}$. Par défintion une uniformisante logarithmique est un élément $\tilde{\pi}_\mathfrak{p}$ de $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ vérifiant :

$$Log_{Iw}(N_{K_\mathfrak{p}/\mathbb{Q}_\ell}(\tilde{\pi}_\mathfrak{p})) = \tilde{f}_\mathfrak{p} \deg_\ell(\ell) = Log_{Iw}(\tilde{\ell}^{\tilde{f}_\mathfrak{p}}).$$

Ceci détermine $\tilde{\pi}_\mathfrak{p}$ à une unité logarithmique près.

3.1.9 Le symbole local logarithmique

Nous définissons le symbole logarithmique local et en donnons une expression explicite sur $\mathbb{Q}_p$.

Théorème 3.1.1. *$(deg, \tilde{v}_{\mathfrak{p}})$ est un couple de corps des classes et $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$ satisfait l'axiome du corps des classes. Ainsi pour toute ℓ-extension abélienne finie $L_{\mathfrak{P}}$ de $K_{\mathfrak{p}}$ extension finie de $\mathbb{Q}_p$, nous avons l'isomorphisme :*

$$Gal(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}/N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$$

Définition 16. *Cela permet de définir l'homomorphisme surjectif suivant appelé le symbole local logarithmique :*

$$(\ ,L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) : \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow Gal(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})$$

Proposition 3.1.7. *Nous avons une expression explicite pour le symbole local logarithmique dans le contexte suivant : soit ζ une racine de l'unité d'ordre une puissance de ℓ, et $a \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$, alors*

$$(a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p))_\ell = \zeta^{n_p}$$

avec

$$n_p = \begin{cases} p^{v_p(a)} & \text{pour } p \neq \ell \text{ et } p \neq \infty \\ (\tilde{\ell})^{-\tilde{v}_\ell(a)} & \text{pour } p = \ell \\ sgn(a) & \text{pour } p = \infty \end{cases}$$

où $(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell$ dénote la projection sur le ℓ- sous-groupe de Sylow de $Gal(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.

Remarque : Si $\mathfrak{p}$ est réelle et $\ell = 2$ alors $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_\infty} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, il est trivial dans tous les autres cas, [Ja1, proposition 1.2] : $sgn(a)$ vaut $+-1$ dans le premier cas et 1 dans tous les autres.

Démonstration. Soit ζ une racine ℓ^m-ième de l'unité, avec $\ell^m \neq 2$. Nous prenons $a \in \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}$ et écrivons $a = u_p \cdot p^{v_p(a)}$ pour $p \neq \ell$, où v_p est la valuation usuelle normalisée de $\mathbb{Q}_p$ qui coïncide dans ce cas particulier avec la logarithmique. Pour $p = \ell$, nous écrivons $a = \ell^{v_\ell(a)}.(\tilde{\ell})^{\tilde{v}_\ell(a)}$. Pour $p \neq \ell$ et $p \neq \infty$ l'extension $\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p$ est une extension non ramifiée. Le principe fondamental [Ne1, theorem 2.6, p. 25] établit que le symbole local associe les uniformisantes aux Frobenius, nous avons que $(p, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p))_\ell$ correspond à l'automorphisme de Frobenius $\phi_p : \zeta \longrightarrow \zeta^p$. De plus le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathfrak{p}}^\times & \xrightarrow{(\ \cdot\ ;\mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}))} & \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} & \xrightarrow{(\ \cdot\ ;\mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}))_\ell} & \mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})_\ell \end{array}$$

où le symbole du haut désigne le symbole local classique et le symbole du bas le symbole local ℓ-adique. Par suite, nous en déduisons

$$(a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p)_\ell)\zeta = \zeta^{n_p}$$

avec

$$n_p = \begin{cases} p^{v_p(a)} & \text{for } p \neq \ell \text{ et } p \neq \infty \\ sgn(a) & \text{for } p = \infty \end{cases}$$

Mais nous voulons avoir $[a, (\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell] = 1$ pour $a \in \mathcal{R}_\mathbb{Q}$ afin de définir la valuation dans le cas logarithmique global, où

$$[a, (\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})_\ell]\zeta = \prod_{\mathfrak{p}} (a, (\mathbb{Q}_p(\zeta)/\mathbb{Q}_p)_\ell)\zeta = \zeta^\alpha.$$

Ainsi nous obtenons

$$\alpha = \prod_p n_p = sgn(a) \cdot \prod_{p \neq \infty \; p \neq \ell} p^{v_p(a)} \cdot n_\ell.$$

De part la formule du produit, nous avons :

$$a = sgn(a) \cdot \prod_{p \neq \infty \; p \neq \ell} p^{v_p(a)} \cdot \ell^{v_\ell(a)} = \tilde{\ell}^{\tilde{v}_\ell(a)} \cdot \ell^{v_\ell(a)}.$$

Par suite, nous en déduisons : $\alpha = a \cdot \ell^{-v_\ell(a)} \cdot n_\ell$.

La condition $\alpha = 1$ impose

$$n_\ell = \tilde{\ell}^{-\tilde{v}_\ell(a)}$$

pour avoir

$$\alpha = a \cdot \ell^{-v_\ell(a)} \cdot \tilde{\ell}^{-\tilde{v}_\ell(a)} = a.a^{-1} = 1.$$

$\square$

3.2 Le cas logarithmique global

NOUS DÉFINISSONS le G-module, l'application degré et la valuation dans le contexte logarithmique global.

3.2.1 G et le G-module dans le cas logarithmique global

Soit G le groupe de Galois de la pro-ℓ-extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$. Comme précédemment, le G-module est la réunion des ℓ-groupes des classes d'idèles $\mathcal{C}_K$ où K parcourt les extensions finies de K : $\bigcup_{[K:\mathbb{Q}]<\infty} \mathcal{C}_K$. et $\mathcal{C}_L$ un Gal(L/K)-module.

3.2.2 deg : $G \mapsto \mathbb{Z}_\ell$ pour le cas logarithmique global

Nous fixons un isomorphisme tel que : $\mathrm{Gal}(\tilde{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_\ell$. Cela permet de définir :

$$\begin{array}{rccc} \deg & : & G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q}) & \rightarrow & \mathbb{Z}_\ell \\ & & \phi & \mapsto & \phi_{|_{\tilde{\mathbb{Q}}}} \end{array}$$

où $\mathbb{Q}^{ab}$ est la pro-ℓ-extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$. Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension finie, nous définissons : $f_K = [K \cap \tilde{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}]$ et nous obtenons par analogie avec le cas local un homomorphisme surjectif $\deg_K = \frac{1}{f_K} \cdot \deg$ tel que $\deg_K : \ G_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ détermine la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique $\tilde{K}$ de K.

3.2.3 La valuation dans le cas logarithmique global :

C'est le même type de construction que précédemment. Et par le choix que nous avons fait pour le symbole local, nous avons déjà $\forall a \in \mathcal{R}_K$, $[a, \tilde{K}/K] = 1$. ce qui permet de donner la définition suivante :

Définition 17. *Nous définissons la valuation $v_K : \mathcal{C}_K \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell$ comme suit :*

$$\mathcal{C}_K \xrightarrow{[\,\cdot\,,\tilde{K}/K]} G(\tilde{K}/K) \xrightarrow{deg_K} \mathbb{Z}_\ell.$$

Lemme 3.2.1. *v_K est hensélienne par rapport au degré deg.*

Démonstration. Les arguments sont les mêmes que dans les lemmes 4.6.2 et 4.6.3 en remplaçant $\mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}$ par $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$. □

Théorème 3.2.1. (deg, v_K) *est un couple de corps des classes et* $\mathcal{C}_K$ *satisfait l'axiome du corps des classes. Ainsi pour toutes les* ℓ*-extensions abéliennes finies* L *de* K*, nous avons l' isomorphisme :*

$$Gal(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}) \simeq \mathcal{J}_K/N_{L/K}\mathcal{J}_L \cdot \mathcal{R}_K.$$

Définition 18. *Cela permet de définir l'homomorphisme surjectif suivant, appelé symbole logarithmique global :*

$$(\ ,L/K) : \mathcal{J}_K \longrightarrow Gal(L/K).$$

3.3 Frobenius logarithmique

Cette section a pour but de définir le Frobenius logarithmique, analogue du Frobenius classique, dans le cadre de la non-ramification logarithmique. La construction explicite du Frobenius conduit à définir une application d'Artin logarithmique, dont nous étudions les propriétés, et en particulier le noyau, qui correspond à un sous-module de Takagi logarithmique.

3.3.1 Le conducteur logarithmique

Dans la théorie classique du corps des classes local, nous disposons d'une filtration décroissante du groupe des unités $U_{K_\mathfrak{p}}$ de $K_\mathfrak{p}^\times$ définie par :

$$U_{K_\mathfrak{p}}^{(n)} = 1 + \mathfrak{p}^n$$

où $\mathfrak{p}$ est l'idéal maximal de l'anneau des entiers.

Les $(U_{K_\mathfrak{p}}^{(n)})_n$ constituent un système de voisinages de 1 dans $K_\mathfrak{p}^\times$. Cette filtration permet ainsi de définir le conducteur local puis global associé à une extension.

Définition et premières propriétés

Considérons une filtration décroissante du groupe des unités logarithmiques $(\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^0 = \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$. Nous sommes en mesure de définir alors un conducteur logarithmique local et un conducteur global, comme suit :

Définition 19. *i) Si $L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}$ est une ℓ-extension abélienne finie ,et si n est le plus petit entier tel que $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^n \subseteq N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}(\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}})$ alors l'idéal :*

$$\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^n$$

est appelé conducteur logarithmique local associé à l'extension.

ii) Si L/K est une ℓ-extension abélienne finie, le conducteur logarithmique global est défini par :

$$\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K} = \prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p}$$

Proposition 3.3.1. *Le $\mathfrak{p}$-conducteur $\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p}$ est trivial si et seulement si l'extension L/K est logarithmiquement non ramifiée en $\mathfrak{p}$. $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ contient donc tous les premiers de K qui sont logarithmiquement ramifiés dans L et seuls cela. En outre, si M est intermédiaire entre K et L alors $\tilde{\mathfrak{f}}_{M/K}$ divise $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{p}$ est une place de K logarithmiquement non ramifiée dans L, nous avons $\tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}} = 1$, et par application du corollaire 2 p.14 :

$$H^0(\mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}), \widetilde{\mathcal{U}}_{L_{\mathfrak{P}}}) = 1;$$

il suit :

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} = N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\widetilde{\mathcal{U}}_{L_{\mathfrak{P}}}),$$

ce qui signifie

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \subseteq N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}).$$

Réciproquement, supposant que $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$ soit trivial, nous en déduisons $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \subseteq N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})$. Soit $n = [\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} : N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})]$; de $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}^n \in N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})$ nous obtenons $(\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}^n)\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \subseteq N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})$. Il suit $L_{\mathfrak{P}} \subseteq M$, où M est le corps des classes de $(\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}^n)\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$ i.e. $N_{M/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_M) = (\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}^n)\cdot\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$. Mais alors $\tilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \subseteq N_{M/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_M)$ c'est à dire que le $\mathfrak{p}$-conducteur est trivial. Par application de la première partie on en déduit que $M/K_{\mathfrak{p}}$ est logarithmiquement non ramifiée. Par la théorie ℓ-adique du corps des classes, nous avons : $Gal(M/K_{\mathfrak{p}}) \simeq (\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}})\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}/(\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}^n)\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$. Par conséquent, M est la ℓ-extension logarithmiquement non ramifiée de degré n ; et de $L_{\mathfrak{P}} \subseteq M$, nous en déduisons que $\mathfrak{p}$ est une place logarithmiquement non ramifiée dans L. □

Exemples

1) Sur $\mathbb{Q}_\ell$, nous avons $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \ell^{\mathbb{Z}_\ell} \simeq \mathbb{Z}_\ell$, de sorte que nous obtenons une filtration naturelle de $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}_\ell}$ en relevant dans $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathbb{Q}_\ell}$ la filtration canonique de $\mathbb{Z}_\ell$ par les $\ell^n\mathbb{Z}_\ell$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2) Étant donné un corps local $K_{\mathfrak{p}}$, nous obtenons une filtration des unités logarithmiques $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}$ comme suit :
   - si $\mathfrak{p}|\ell$ en relevant par la norme locale $N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_\ell}$ la filtration des unités sur $\mathbb{Q}_\ell$: $\widetilde{\mathcal{U}}^n_{K_{\mathfrak{p}}} = \{x \in \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \mid N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_\ell}(x) \in (\ell)^{\ell^n\mathbb{Z}_\ell}\}$. Ainsi, nous avons $\bigcap_n \widetilde{\mathcal{U}}^n_{K_{\mathfrak{p}}} = \{x \in \mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}} \mid N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_\ell}(x) = 1\}$. Or par la théorie du corps des classes, le noyau de la norme fixe le compositum $K_{\mathfrak{p}}\mathbb{Q}_\ell^{ab}$. Il en découle que la suite décroissante $(\widetilde{\mathcal{U}}^n_{K_{\mathfrak{p}}})_n$ n'est pas exhaustive.
   - si $p \not|\ell$, comme $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}} \simeq \mu_{\mathfrak{p}}$ la filtration naturelle est $0 \subset \mu_{\mathfrak{p}}$.

Remarque :

D'après [Ja3, Théorème 4.1 iii)], la ℓ-valuation logarithmique est, pour les places $\mathfrak{p} \not|\ell$, proportionnelle à la valuation ordinaire $v_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}$. En effet, de $\tilde{v}_{\mathfrak{p}} = -\frac{\mathrm{Log}(<N\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}}>)}{\deg(\mathfrak{p})}$ pour $\mathfrak{p} \not|\ell$, nous obtenons $\tilde{v}_{\mathfrak{p}} = \frac{\mathrm{Log}(N\mathfrak{p})}{\deg(\mathfrak{p})}v_{\mathfrak{p}}$. Dans ce cas le groupe des unités logarithmiques correspond au groupe $\mathcal{U}_{K_{\mathfrak{p}}}$, à savoir au ℓ-sous-groupe de Sylow du groupe des racines de l'unité $\mu_{\mathfrak{p}}$. Par suite, le plus petit entier n recherché est soit 0 soit 1. Notons que dans le cas $\mathfrak{p} \not|\ell$, le groupe des unités principales $U^1_{\mathfrak{p}}$ de $K_{\mathfrak{p}}$ est ℓ-divisible, ainsi le conducteur local classique vaut 1 ou $\mathfrak{p}$.

3.3.2 Diviseurs logarithmiques

Définition 20. *[Ja3, definition 2.1]*
Soit K un corps de nombres, le ℓ-groupe des diviseurs logarithmiques de K est le quotient

$$D\ell_K = \mathcal{J}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}.$$

Par la valuation logarithmique $\tilde{v}_{\mathfrak{p}}$ il s'identifie au $\mathbb{Z}_\ell$-module libre construit sur les places finies de K.

Définition 21. *[Ja3, definition 2.1]*
Le degré d'un diviseur logarithmique $\delta = \sum_{\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ est défini par :

$$\tilde{deg}(\delta) = \sum_{\mathfrak{p}} n_{\mathfrak{p}} \, deg_K \mathfrak{p}$$

induisant une application $\mathbb{Z}_\ell$-linéaire sur le groupe des diviseurs logarithmiques et à valeurs dans $\mathbb{Z}_\ell$. Les diviseurs logarithmiques de degré nul forment un sous-groupe de $D\ell_K$ noté $\widetilde{D\ell}_K$.

Proposition 3.3.2. *[Ja3, definition 2.2]*
L'application $\mathbb{Z}_\ell$-linéaire $\tilde{div}_K : x \longrightarrow \sum_{\mathfrak{p} \in Pl_K^0} \tilde{v}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})\mathfrak{p}$ envoie $\mathcal{R}_K$ sur un sous-groupe de $\widetilde{D\ell_K}$, noté $\widetilde{P\ell_K}$ et appelé le sous-groupe des diviseurs logarithmiques principaux.

Proposition 3.3.3. *[Ja3, definition 2.4]*
i) Soit $\mathfrak{p}$ une place finie de K, l'application d'extension logarithmique est définie par :

$$\tilde{\mathfrak{i}}_{L/K}(\mathfrak{p}) = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \tilde{e}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{P}).$$

ii) Pour un premier $\mathfrak{P}$ au dessus de $\mathfrak{p}$ la norme logarithmique est définie par :

$$\tilde{N}_{L/K}(\mathfrak{P}) = \tilde{f}_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{P}).$$

Ces applications sont compatibles avec les applications extension et norme définies entre $\mathcal{R}_L$ et $\mathcal{R}_K$. En d'autres termes, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_L \arrow[r, "\tilde{div}_L"] \arrow[d, "N_{L/K}"] & \tilde{D}\ell_L \arrow[r, "deg_L"] \arrow[d, "\tilde{N}_{L/K}"] & \mathbb{Z}_\ell \arrow[d, equal] \\
\mathcal{R}_K \arrow[r, "\tilde{div}_K"] & \tilde{D}\ell_K \arrow[r, "deg_K"] & \mathbb{Z}_\ell
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_L \arrow[r, "\tilde{div}_L"] & \tilde{D}\ell_L \arrow[r, "deg_L"] & \mathbb{Z}_\ell \\
\mathcal{R}_K \arrow[r, "\tilde{div}_K"] \arrow[u, "\tilde{\mathfrak{i}}_{L/K}"] & \tilde{D}\ell_K \arrow[r, "deg_K"] \arrow[u, "\tilde{\mathfrak{i}}_{L/K}"'] & \mathbb{Z}_\ell \arrow[u, "{[L:K]}"']
\end{tikzcd}$$

3.3.3 Le Frobenius logarithmique et l'application d'Artin logarithmique

Définition 22. *Le Frobenius logarithmique*
Soit L/K une ℓ-extension abélienne finie. Soit $\mathfrak{p}$ une place de K logarithmiquement non ramifiée dans L. Le Frobenius logarithmique en $\mathfrak{p}$ est défini via le symbole logarithmique local :

$$(\widetilde{\frac{L/K}{\mathfrak{p}}}) = (\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}})$$

avec $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}$ l'uniformisante logarithmique, définie dans la proposition 3.7.3.
Il s'exprime aussi via le symbole global, de part le lien local-global :

$$(\widetilde{\frac{L/K}{\mathfrak{p}}}) = ([\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}], L/K)$$

avec $[\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}]$ l'image de $\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathcal{J}_K$.

Définition 23. *L'application d'Artin logarithmique*
Soit L/K une ℓ-extension abélienne finie. Soit $\mathfrak{p}$ une place de K logarithmiquement non ramifiée dans L. Soit $D\ell_K$ le groupe des diviseurs logarithmiques de K. Soit $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ le conducteur logarithmique global de de L/K , et $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ les diviseurs logarithmiques premiers à $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$.
Nous définissons l'application suivante pour une place $\mathfrak{p}$:

$$\begin{array}{rccc} (\widetilde{\frac{L/K}{}}) & : D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}} & \rightarrow & \mathrm{Gal}(L/K) \\ & \mathfrak{p} & \mapsto & (\widetilde{\frac{L/K}{\mathfrak{p}}}) \end{array}$$

où le Frobenius logarithmique est

$$(\widetilde{\frac{L/K}{\mathfrak{p}}}) = ([\tilde{\pi}_{\mathfrak{p}}], L/K).$$

Nous étendons cette application, par multiplicativité à $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. Cette application est alors appelée application d'Artin logarithmique.

Quelques remarques :

1)Cette définition est motivée par la proposition suivante, vraie en théorie abstraite du corps des classes :

Proposition 3.3.4. *[Ne1, proposition3.4] Dans le contexte abstrait, soit $a \in A_K$, $(\ , L/K)$ le symbole de la norme résiduelle L/K, alors*

$$(a, \tilde{K}/K) = \phi_K^{v_K(a)}$$

où ϕ_K est le Frobenius générique de $\tilde{K}/K$.

2)Le Frobenius logarithmique est un générateur du sous-groupe de décomposition. C'est une conséquence du théorème fondamental de la théorie ℓ-adique 3.1.1 : en effet dans cette correspondance ℓ-adique du corps des classes le sous-groupe de décomposition associé à une place $\mathfrak{p}$ de K correspond à l'image dans G_K^{ab} du sous-groupe $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{J}_K$.

3)Lorsque $\mathfrak{p} \not| \ell$, les valuations classique et logarithmique sont proportionnelles : en effet $\tilde{\pi}_\mathfrak{p} = \pi_\mathfrak{p}$ la $\mathbb{Z}_\ell$-extension non ramifiée et la $\mathbb{Z}_\ell$-cyclotomique coïncident alors. Ainsi symbole d'Artin classique et symbole d'Artin logarithmique correspondent sur les idéaux.

4)L'application précédente s'étend par multiplicativité à $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$: en effet par hypothèse L/K est une ℓ-extension.

Proposition 3.3.5. *Propriétés de l'application d'Artin logarithmique*

L'application d'Artin logarithmique satisfait les propriétés suivantes pour L/K une ℓ-extension abélienne finie, $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ le conducteur global de l'extension L/K :

i) Si M est intermédiaire entre L et K, alors la restriction de $\widetilde{(\frac{L/K}{\mathfrak{a}})}$ à M est $\widetilde{(\frac{M/K}{\mathfrak{a}})}$, pour tout $\mathfrak{a} \in D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$.

ii) Si L et L' sont des ℓ-extensions abéliennes, et si nous considérons Gal(LL'/K) comme sous-groupe de Gal$(L/K) \times$ Gal(L'/K), via l'application $\sigma \in$ Gal$(LL'/K) \to (\sigma|_L, \sigma|_{L'}) \in$ Gal$(L/K) \times$ Gal(L'/K), alors $\widetilde{(\frac{LL'/K}{\mathfrak{a}})}$ est $(\widetilde{(\frac{L/K}{\mathfrak{a}})}, \widetilde{(\frac{L'/K}{\mathfrak{a}})})$ pour tout $\mathfrak{a} \in D\ell_{LL'}^{\tilde{\mathfrak{f}}_{LL'/K}}$.

iii) Si K' est une sous-extension quelconque de K et si nous considérons Gal(LK'/K') comme isomorphe par restriction à L, à un sous-groupe du Gal(L/K), alors la restriction de $\widetilde{(\frac{LK'/K'}{\mathfrak{a}'})}$ à K est $\widetilde{(\frac{K}{N_{K'/K}\mathfrak{a}'})}$ pour tout $\mathfrak{a}' \in D\ell_{K'}^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K'}}$.

iv) En particulier si M est un sous-corps entre L et K, alors $\widetilde{(\frac{L/M}{\mathfrak{U}})} = \widetilde{(\frac{L/K}{N_M\mathfrak{U}})}$, pour tout $\mathfrak{U} \in D\ell_M^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$.

Démonstration. i) Il suffit de vérifier la propriété pour chaque premier $\mathfrak{p}$. Cela résulte dans ce cas de la propriété de fonctorialité de l'application de réciprocité : $\mathrm{res}_M \circ \phi_{L/K}(\tilde{\pi}_\mathfrak{p}) = \phi_{M/K}(\tilde{\pi}_\mathfrak{p})$.

ii) est une conséquence de i).

iii) Cette propriété correspond à l'égalité entre les deux termes suivants : $\widetilde{(\frac{LK'/K'}{\mathfrak{a}'})}|_K = \phi_{LK'/K'}(\mathfrak{a}')$ et $\widetilde{(\frac{L}{N_{K'}\mathfrak{a}'})} = \phi_{L/K}(N_{K'}(\mathfrak{a}'))$ pour tout $\mathfrak{a}' \in D\ell_{K'}^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K'}}$. Par fonctorialité de l'application de réciprocité, nous en déduisons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Gal}(L'/K') & \xrightarrow{r_{L'/K'}} & \mathcal{J}_{K'}/N_{L'/K'}\mathcal{J}_{L'} \cdot \mathcal{R}_{K'} \\
\downarrow & & \downarrow N_{K'/K} \\
\mathrm{Gal}(L/K) & \xrightarrow[r_{L/K}]{} & \mathcal{J}_K/N_{L/K}\mathcal{J}_L \cdot \mathcal{R}_K
\end{array}$$

où $r_{L/K}$ est l'application de réciprocité de la théorie ℓ-adique du corps des classes. Par conséquent pour le symbole logarithmique global, nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J}_{K'} \arrow[r, "(\, ,L'/K')"] \arrow[d, "N_{K'/K}"] & \mathrm{Gal}(LK'/K') \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\
\mathcal{J}_K \arrow[r, "(\, ,L/K)"'] & \mathrm{Gal}(L/K)
\end{tikzcd}$$

et la propriété se déduit alors de $\mathrm{res} \circ (\, , LK'/K') = (\, , L/K) \circ N_{K'/K}$.

iv) est un cas particulier de iii) en prenant $K' = L$.

$\square$

Définition 24. *Le noyau de l'application précédente* $(\widetilde{\frac{L/K}{\cdot}})$ *est noté* $A\ell_{L/K}$ *et appelé le sous-module d'Artin logarithmique.Pour tout module* m *divisible par le conducteur logarithmique global de l'extension* L/K*,nous posons* $A\ell_{L/K,m} = A_{L/K} \cap D\ell_K^m$.

Théorème 3.3.1. *Théorème d'approximation* ℓ*-adique [Gr1, II.2]*

Le morphisme de semi-localisation

$$\mathcal{R}_K \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$$

est surjectif pour tout ensemble fini de places S*. En effet, l'image de* $\mathcal{R}_K$ *est un sous-*$\mathbb{Z}_\ell$*-module compact et dense.*

Théorème 3.3.2. *Soit* L/K *une* ℓ*-extension abélienne finie,* m *un module de* K *divisible par le conducteur logarithmique global de l'extension* L/K *alors la restriction de* $(\widetilde{\frac{L/K}{\cdot}})$ *à* $D\ell_K^m$*, est surjective et induit un isomorphisme entre* $D\ell_K^m / A\ell_{L/K,m}$ *et Gal*(L/K).

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, nous savons que le symbole global logarithmique est surjectif. Ainsi il existe $\alpha = (\alpha_\mathfrak{p}) \in \mathcal{J}_K$ tel que : $(\alpha, L/K) = \sigma$. Par le théorème d'approximation, $\mathcal{J}_K = \mathcal{J}_K^m \mathcal{R}_K$. Il s'ensuit $\alpha = \beta.\gamma$ avec $\beta \in \mathcal{J}_K^m$ et $\gamma \in \mathcal{R}_K$. Comme nous connaissons le noyau du symbole global $(N_{L/K}(\mathcal{J}_L)\mathcal{R}_K)$: $(\alpha, L/K) = (\beta, L/K) = \sigma$. Considérons alors le diviseur logarithmique associé à β : $\prod \mathfrak{p}^{\tilde{v}_\mathfrak{p}(\beta)} \in D\ell_K^m$, et son image est σ.

$\square$

Proposition 3.3.6. *Soit* L/K *une* ℓ*-extension abélienne finie,* $\mathfrak{p}$ *un premier de* K *logarithmiquement non ramifiée dans* L*. Supposons que* $\mathfrak{p}^\alpha$ *soit la plus petite puissance de* $\mathfrak{p}$ *contenue dans le noyau de l'application d'Artin logarithmique. Alors* p *se décompose dans* L *en* $[L : K]/\alpha$ *premiers distincts.*

Nous définissons donc maintenant les modules de Takagi logarithmiques. Nous prouvons que le $\mathbb{Z}_\ell$-module de Takagi logarithmique correspond au noyau de l'application d'Artin logarithmique.

Définition 25. *Soit L/K une ℓ-extension abélienne, un cycle m de K est dit admissible pour l'extension si c'est un multiple du conducteur $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$, où*

$$\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K} = \prod \tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}$$

est le produit des conducteurs locaux $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$.

Définition 26. *Soit K un corps de nombres, un cycle (ou module) de K est un produit de places de K.*

Définition 27. *Soit L/K une ℓ-extension abélienne, m un cycle admissible, nous définissons :*

$$\mathcal{J}_K^{(m)} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid m} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}|m} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^{v_\mathfrak{p}(m)}$$

$$\mathcal{R}_K^{(m)} = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^{(m)}.$$

Définition 28. *Étant donné un corps de nombres K, et m un cycle de K, nous posons*

$$\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid m} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}|m} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^{v_\mathfrak{p}(m)}$$

où $v_\mathfrak{p}(m)$ est la $\mathfrak{p}$-participation de $\mathfrak{p}$ dans m et $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^{v_\mathfrak{p}(m)}$ le terme correspondant de la filtration du groupe des unités logarithmiques.

Définition 29. *Soit L/K une ℓ-extension abélienne, le $\mathbb{Z}_\ell$-module de Takagi logarithmique est défini par :*

$$T\ell_{L/K} = P\ell_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})} \cdot N_{L/K}(D\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}})$$

où $P\ell_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})}$ est le sous-module des diviseurs logarithmiques principaux associés aux éléments de $\mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})}$.

Remarque : Il faut noter l'analogie entre la définition du module de Takagi logarithmique avec celle du groupe de Takagi classique.

Définition 30. *Soit L/K une ℓ-extension abélienne et m un cycle admissible, le module de Takagi logarithmique associé à m est défini par :*

$$T\ell_{L/K}^m = P\ell_K^{(m)} \cdot N_{L/K}(D\ell_L^m)$$

avec $D\ell_K^m$ le sous-groupe des diviseurs logarithmiques premiers à m, $N_{L/K}(D\ell_L^m)$ le sous-groupe de $D\ell_K^m$ constitué par les éléments de la forme $N_{L/K}(\mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est un diviseur logarithmique de L premier à m (i.e. par définition premier à tout idéal $\mathfrak{P}$ de L au dessus d'un idéal $\mathfrak{p}|m$) et $P\ell_K^{(m)}$ le sous-groupe des diviseurs logarithmiques principaux correspondant à l'image $\mathcal{R}_K^{(m)}$.

Théorème 3.3.3. *L/K étant une ℓ-extension abélienne finie, nous avons l'égalité :*

$$A\ell_{L/K} = T\ell_{L/K}.$$

En particulier pour tout module admissible m, nous avons :

$$A\ell^m_{L/K} = T\ell^m_{L/K}.$$

Démonstration. Pour simplifier les notations, nous notons le conducteur logarithmique global rattaché à l'extension par $\tilde{\mathfrak{f}}$. Par le théorème 6.3.1, nous avons :

$$\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathcal{J}_K/N_{L/K}\mathcal{J}_L\mathcal{R}_K.$$

D'après le théorème d'approximation, nous avons

$$\mathcal{J}_K = \mathcal{J}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}}\mathcal{R}_K.$$

Ainsi nous obtenons :

$$\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathcal{J}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}}/N_{L/K}\mathcal{J}_L^{\tilde{\mathfrak{f}}}\mathcal{R}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}}.$$

Or les éléments de $\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})} = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\tilde{\mathfrak{f}}}\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}\prod_{\mathfrak{p}|\tilde{\mathfrak{f}}}\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^{v_\mathfrak{p}(\tilde{\mathfrak{f}})}$ sont par construction des normes :

si $\mathfrak{p}\nmid\tilde{\mathfrak{f}}$, alors $\mathfrak{p}$ est logarithmiquement non ramifiée et les unités sont normes, de plus si $\mathfrak{p}|\tilde{\mathfrak{f}}$, c'est la définition du conducteur qui implique que ces éléments sont normes. D'après cette remarque, nous obtenons :

$$\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathcal{J}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}}/N_{L/K}\mathcal{J}_L^{\tilde{\mathfrak{f}}}\,\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}\mathcal{R}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}}.$$

Or le théorème d'approximation simultanée donne : $\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}\mathcal{R}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}} = \widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}$. Ainsi en utilisant cette égalité et en quotientant par $\widetilde{\mathcal{U}}_K$, nous obtenons :

$$\mathrm{Gal}(L/K) \simeq D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}}/P\ell_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}\cdot N_{L/K}(D\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}}).$$

□

Lemme 3.3.1. *Avec les mêmes notations que précédement, nous avons :*

$$\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}\mathcal{R}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}} = \widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}.$$

Démonstration. Considérons $\alpha \in \widetilde{\mathcal{U}}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}\mathcal{R}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}}$ et écrivons $\alpha = ur$ avec $u \in \widetilde{\mathcal{U}}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}$ et $r \in \mathcal{R}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}}$. Cette dernière condition implique que pour les places $\mathfrak{p}$ divisant le conducteur, la composante locale $r_\mathfrak{p}$ est une unité logarithmique. Or le théorème d'approximation nous donne un élément β un idèle principal, dont les composantes locales pour les places qui divisent le conducteur valent $r_\mathfrak{p}$. De sorte que $\alpha\beta^{-1} \in \widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}$. D'où la première inclusion.

Réciproquement, considérons $\alpha \in \widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}$ et écrivons $\alpha = ur$ avec cette fois ci $u \in \widetilde{\mathcal{U}}_K$ et $r \in \mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}$. Comme $u \in \widetilde{\mathcal{U}}_K$, la composante locale $u_\mathfrak{p}$ est une unité logarithmique et en particulier pour les $\mathfrak{p}|\tilde{\mathfrak{f}}$. Or le théorème d'approximation nous donne un idèle principal β dont les composantes locales pour les premiers $\mathfrak{p}|\tilde{\mathfrak{f}}$ valent $u_\mathfrak{p}$. Ainsi $\alpha\beta^{-1} \in \widetilde{\mathcal{U}}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}})}\mathcal{R}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}}$. D'où l'égalité. □

3.3.4 Exemple : le cas quadratique

On considère l'extension quadratique suivante : $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$. Il s'agit d'une ℓ-extension pour $\ell = 2$. Or dans le cas d'une ℓ-extension, la ramification au sens classique et la ramification au sens logarithmique ne diffèrent que pour les places au dessus de ℓ, voir [Ja3].

1) Considérons d'abord une place p qui ne divise pas 2 :

- soit la place p est ramifiée au sens classique, et donc dans ce contexte, au sens logarithmique : alors le Frobenius classique et le Frobenius logarithmique ne sont pas définis

-soit la place p est non ramifiée au sens classique et logarithmique : deux sous cas sont alors à envisager

soit p est inerte et log-inerte : alors le sous-groupe de décomposition est isomorphe au groupe de Galois de l'extension quadratique. Il est alors de cardinal 2 et contient l'identité, et le Frobenius qui coïncide ici avec le Frobenius logarithmique.

soit p est totalement décomposée et totalement log-décomposée : le sous-groupe de décomposition est alors trivial, et il en est de même pour le Frobenius classique et le Frobenius logarithmique.

2) Étudions le cas de 2 :

Dire que 2 est une place logarithmiquement non ramifiée équivaut par définition à :

$$[\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) \cap \widehat{\mathbb{Q}_2^c} : \mathbb{Q}_2] = 1$$

où $\widehat{\mathbb{Q}_2^c}$ désigne la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_2$. Or $\widehat{\mathbb{Q}_2^c}$ est le compositum de toutes le $\mathbb{Z}_q$-extensions cyclotomiques pour tous les q premiers. Celles-ci sont linéairement disjointes de groupe de Galois $\mathbb{Z}_p$ et seule $\mathbb{Z}_2$ possède un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de sorte que la non-ramification au sens logarithmique de 2 se traduit par :

$$\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) \subseteq \mathbb{Q}_2^c$$

où $\mathbb{Q}_2^c$ désigne la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$; et comme cette extension est cyclique, on peut se cantonner au premier étage, à savoir :

$$\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) \subseteq \mathbb{Q}_2(\sqrt{2}).$$

Soit un corps K, a, b deux éléments de $K^\times$, alors on a :

$$K(\sqrt{a}) = K(\sqrt{b}) \Leftrightarrow a/b \in {K^\times}^2.$$

D'où les deux cas envisageables :

$$\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}_2$$

ou

$$\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$$

à savoir

$$d \in \mathbb{Q}_2^{\times 2}$$

ou

$$d/2 \in \mathbb{Q}_2^{\times 2}.$$

D'après [Se2, théorème 3 et corollaire], les carrés de $\mathbb{Q}_2$ sont de la forme $2^n.u$ où u est une unité 2-adique congrue à $1 \mod 8$ et n est un entier rationnel pair . Ce qui nous amène aux deux congruences suivantes :

$$d \equiv 1 \mod 8$$

ou

$$d/2 \equiv 1 \mod 8$$

.

Si $d \equiv 1 \mod 8$, $\mathbb{Q}_2(\sqrt{d}) = \mathbb{Q}_2$, l'extension locale est triviale, il en est de même du sous-groupe de décomposition. 2 est à la fois décomposée et logarithmiquement décomposée.

Si $d \equiv 2 \mod 16$, 2 est une place ramifiée au sens classique mais logarithmiquement inerte. Son sous-groupe de décomposition est de cardinal 2, il contient l'élément neutre et un autre qui correspond au Frobenius logarithmique Comme $\mathbb{Q}_2(\sqrt{d})/\mathbb{Q}_2$ est la sous-extension réelle maximale de $\mathbb{Q}_2(\zeta_8)/\mathbb{Q}_2$, à savoir fixée par $<-1>$, avec $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_2(\zeta_8)/\mathbb{Q}_2) \simeq (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$. Nous pouvons alors expliciter le Frobenius logarithmique de 2. Le choix du dénominateur de la valuation logarithmique impose l'uniformisante logarithmique en 2 : $\tilde{2} = 1 + 2 = 3$. Ainsi nous avons :

$$(\frac{\widetilde{K/\mathbb{Q}}}{2})(\zeta_8) = \zeta_8^3$$

3.3.5 Un cas cubique

On considère l'extension $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/9))/\mathbb{Q}$, extension cubique de polynôme minimal $x^3 - 3/4x + 1/8$. Dans cette extension 3 est une place ramifiée au sens classique, étudions la ramification au sens logarithmique. Dire que $\mathfrak{p}$ est logarithmiquement non ramifiée dans $K = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/9))$, signifie par définition que $\tilde{e_{\mathfrak{p}}} = 1$ à savoir :

$$K_{\mathfrak{p}} \subseteq \widehat{\mathbb{Q}_3}$$

où $\widehat{\mathbb{Q}_3}$ désigne la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_3$. Or $\widehat{\mathbb{Q}_3}$ est le compositum de toutes les $\mathbb{Z}_q$-extensions cyclotomiques pour tous les premiers q. Ces extensions sont linéairement disjointes, et seule la $\mathbb{Z}_3$-extension cyclotomique contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ de sorte que la non-ramification logarithmique se traduit par :

$$K_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathbb{Q}_3^c$$

où $\mathbb{Q}_3^c$ désigne la $\mathbb{Z}_3$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_3$, comme c'est cyclique on peut se limiter au premier étage, ce qui donne :

$$K_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathbb{Q}_3(\cos(2\pi/9))$$

par suite 3 est logarithmiquement non ramifiée dans K. Le sous-groupe de décomposition est alors isomorphe au groupe de Galois de l'extension locale i.e $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_3(\cos(2\pi/9))/\mathbb{Q}_3)$, il contient trois éléments parmi lesquels se trouve le Frobenius logarithmique de 3. Par définition le Frobenius logarithmique en 3 correspond à l'image de l'uniformisante $\tilde{\pi}_3 = 1+3 = 2^2$ via le symbole local logarithmique, par suite le Frobenius logarithmique en 3 correspond à la restriction pour l'extension considérée de $\zeta \longrightarrow \zeta^{-2}$.

3.3.6 Autre exemple

On considère l'extension biquadratique suivante : $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{17})/\mathbb{Q}$, qui contient les sous-extensions quadratiques suivantes : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{34})/\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{17})/\mathbb{Q}$.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{17}) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[dr] & \mathbb{Q}(\sqrt{34}) \arrow[d] & \mathbb{Q}(\sqrt{17}) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

Bilan de la ramification classique :

-2 est ramifiée dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$

-2 est ramifiée dans $\mathbb{Q}(\sqrt{34})/\mathbb{Q}$

-2 est décomposée dans $\mathbb{Q}(\sqrt{17})/\mathbb{Q}$.

Bilan de la ramification logarithmique :

Par application des résultats obtenus dans l'exemple 1 :

-2 est log-inerte dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$: en effet $\mathbb{Q}_2(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$

-2 est log-inerte dans $\mathbb{Q}(\sqrt{34})/\mathbb{Q}$

-2 est log-décomposée dans $\mathbb{Q}(\sqrt{17})/\mathbb{Q}$.

Au final dans l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{17})/\mathbb{Q}$, la place 2 est ramifiée au sens classique, mais log non ramifiée car nous avons le compositum d'une extension log-inerte et d'une extension log-décomposée. Par suite le Frobenius classique n'est pas défini, alors que le Frobenius logarithmique l'est : cela montre que l'on ne peut pas toujours les comparer.

3.3.7 Généralisation : du cas quadratique à celui d'une ℓ-extension

Théorème 3.3.4. *Cas général d'une ℓ-extension*

Considérons $K/\mathbb{Q}$ une ℓ-extension abélienne finie et $\mathfrak{p}$ une place de K.

-Si $\mathfrak{p}$ n'est pas au dessus de ℓ, ramification classique et logarithmique coïncident. Si $\mathfrak{p}$ est une place non ramifiée dans un sens ou dans l'autre, Frobenius classique et logarithmique coïncident également.

-Si $\mathfrak{p}$ est au dessus de ℓ, les seuls cas possibles sont les suivants :

-soit $\mathfrak{p}$ est totalement décomposée au sens logarithmique et au sens classique. Le sous-groupe de décomposition est trivial, et Frobenius classique et logarithmique sont tous deux égaux et triviaux.

-soit $\mathfrak{p}$ est logarithmiquement non ramifiée mais ramifiée au sens classique. Alors seul le Frobenius logarithmique existe.

Démonstration. Dans le premier cas, les uniformisantes classique et logarithmique sont égales, les symboles locaux correspondent : d'où l'égalité des Frobenius classique et logarithmique.

Dans le deuxième cas, considérons $\mathfrak{p}$ au dessus de ℓ, telle que $\mathfrak{p}$ soit logarithmiquement non ramifiée. Comme nous travaillons avec une ℓ-extension, cette condition se traduit de la façon suivante :

$$K_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathbb{Q}_\ell^c$$

, où $\mathbb{Q}_\ell^c$ désigne la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_\ell$. Comme $K/\mathbb{Q}$ est une extension finie, nous pouvons nous limiter aux premiers étages de la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique, à savoir il existe un entier n tel que

$$K_{\mathfrak{p}} \subseteq B_{n+1}$$

, où B_{n+1} désigne la sous-extension réelle maximale de $\mathbb{Q}_\ell(\zeta_{\ell^{n+1}})$ avec $\zeta_{\ell^{n+1}}$une racine ℓ^{n+1}-ième primitive de l'unité et $[B_{n+1} : \mathbb{Q}_\ell] = \ell^n$. Ceci nous amène à :

$$K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_\ell \text{ ou } K_{\mathfrak{p}} = B_{n+1}.$$

Dans le premier sous-cas, l'extension locale est triviale : la place est complètement décomposée au sens classique et au sens logarithmique. Dans le deuxième, $\mathfrak{p}$ est ramifiée au sens classique mais logarithmiquement non ramifiée au sens logarithmique. $\square$

4 Approche type corps des classes de rayon de la théorie logarithmique

4.1 Corps des classes de rayon logarithmique

Proposition 4.1.1. *Soit K un corps de nombres et m un cycle de K. Le sous-module $\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)} \cdot \mathcal{R}_K$ est un sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$, d'après la théorie ℓ-adique du corps des classes, il correspond à une ℓ-extension abélienne de K, notée $K(m)$ et telle que :*

i) $K^{(m)}$ *est logarithmiquement non ramifiée en dehors de m*

ii) $N_{K^{(m)}/K}(\mathcal{J}_{K^{(m)}}) \cdot \mathcal{R}_K = \widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)} \cdot \mathcal{R}_K$

iii) $\mathrm{Gal}(K^{(m)}/K) \simeq \mathcal{J}_K / \widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)} \cdot \mathcal{R}_K := \mathcal{C}\ell_K^m$

Interprétation idélique

$$\mathcal{J}_K^m = \prod_{\mathfrak{p} \nmid m} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p} | m} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$$

$$\mathcal{R}_K^m = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^m.$$

Par le théorème d'approximation nous avons $\mathcal{J}_K = \mathcal{J}_K^m \mathcal{R}_K$ ainsi nous obtenons :

$$\mathcal{C}\ell_K^m = \mathcal{J}_K^m / \widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)} \cdot \mathcal{R}_K^m.$$

Or $\mathcal{J}_K^m = (\prod_{\mathfrak{p} \nmid m} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}) \mathcal{R}_K^m$, d'après le théorème d'approximation ainsi en utilisant le théorème du double quotient il vient :

$$\mathcal{C}\ell_K^m = (\prod_{\mathfrak{p} \nmid m} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}) / \mathcal{U}_K^{(m)} \mathcal{R}_K^m \cap (\prod_{\mathfrak{p} \nmid m} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}).$$

Il suit

$$\mathcal{C}\ell_K^m = (\prod_{\mathfrak{p} \nmid m} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}) / \prod_{\mathfrak{p} \nmid m} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}} [(\prod_{\mathfrak{p} \nmid m} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}) \cap \mathcal{R}_K^m \prod_{\mathfrak{p} | m} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^{v_\mathfrak{p}(m)}].$$

Les éléments du dénominateur correspondent aux idèles principaux dans $\mathcal{R}_K^{(m)}$, finalement

$$\mathcal{C}\ell_K^m \simeq D\ell_K^m / P\ell_K^m.$$

4.2 Sous-modules de congruences logarithmiques

Dans cette partie, nous introduisons les sous-modules de congruences au sens logarithmique, analogues du cas classique. Nous définissons une relation d'équivalence pour ces sous-modules et sommes amenés à considérer le module, dit de congruence primitif d'une classe d'équivalence, associé au conducteur de la classe de congruences. Nous renvoyons à [Gr2, I.10], [Jan, chapitre 5, §6] pour le cas classique.

Définition 31. *Nous appelons sous-module de congruence logarithmique de K tout couple de la forme (m, C) avec m un module de K et C un sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module fermé d'indice fini de $D\ell_K$ vérifiant les inclusions suivantes :*

$$P\ell_K^{(m)} \subseteq C \subseteq D\ell_K^m.$$

Nous dirons alors que m est un module de définition du sous-module de congruence C.

Définition 32. *Soient (m, C) et (m', C') deux sous-modules de congruences logarithmiques. Nous dirons qu'ils sont équivalents $(m, C) \simeq (m', C')$ si nous avons :*

$$C \cap D\ell_K^{m'} = C' \cap D\ell_K^m.$$

Proposition 4.2.1. *Cette relation, définie sur les sous-modules de congruences, est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Cette relation est clairement réflexive et symétrique. Montrons alors qu'elle est transitive : soient (m, C), (m', C') et (m'', C'') des sous-modules de congruences vérifiant $(m, C) \simeq (m', C')$ et $(m', C') \simeq (m'', C'')$, ce qui nous donne :

$$C \cap D\ell_K^{m'} = C' \cap D\ell_K^m \qquad \text{et} \qquad C' \cap D\ell_K^{m''} = C'' \cap D\ell_K^{m'}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$(C \cap D\ell_K^{m'}) \cap D\ell_K^{m''} = C' \cap D\ell_K^m \cap D\ell_K^{m''} = (C' \cap D\ell_K^{m''}) \cap D\ell_K^m = C'' \cap D\ell_K^{m'} \cap D\ell_K^m.$$

Finalement $(C \cap D\ell_K^{m''}) \cap D\ell_K^{m'} = (C'' \cap D\ell_K^m) \cap D\ell_K^{m'}$. Or si nous considérons un diviseur logarithmique $d \in C \cap D\ell_K^{m''}$, modulo $P\ell_K^{\mathrm{pgcd}(m', m'')}$, il devient premier à m' d'où l'égalité. □

Proposition 4.2.2. *Si (m, C) est un sous-modules de congruences, alors pour tout multiple m' de m nous avons $(m, C) \simeq (m', C \cap D\ell_K^{m'})$.*

Démonstration. Clair. □

Lemme 4.2.1. *Soit m un module donné de K, et $aP\ell_K^m$ un élément de $D\ell_K^m / P\ell_K^m$. Alors pour tout idéal m' de K, il existe un diviseur logarithmique $a' \in aP\ell_K^m$ premier à m'.*

Démonstration. Nous savons que $D\ell_K^m/P\ell_K^{(m)} \simeq \mathcal{J}_K^m/\mathcal{R}_K^{(m)}$. Et $\mathcal{R}_K \longrightarrow \prod_{\mathfrak{p}|m_1} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$ est une application surjective d'après le théorème d'approximation. Par suite il existe un diviseur logarithmique $a' \in aP\ell_K^{(m)}$, premier à m'. □

Proposition 4.2.3. *Si $(m,C) \simeq (m',C')$ alors les quotients $D\ell_K^m/C$ et $D\ell_K^{m'}/C'$ sont isomorphes.*

Démonstration. Nous procédons comme dans le cas classique, [Gr2]proposition I.3, en construisant une application de $D\ell_K^m/C$ dans $D\ell_K^{m'}/C'$. Soit $a \in D\ell_K^m$, alors par application du lemme précédent, nous savons qu'il existe un diviseur logarithmique a' tel que $a' \in D\ell_K^{m'}$ et $a' \in aP\ell_K^{(m)}$. Or par hypothèse, $P\ell_K^{(m)} \subset C$, il suit donc que $a' \in aC$. Nous considérons alors l'application qui à aC fait correspondre $a'C'$. Il s'agit en effet d'une application : si $a'' \in aC$ et est premier avec m', alors $a"/a \in C \cap D\ell_K^{m'} = C' \cap D\ell_K^m \subset C'$. Le noyau de cette application est trivial : en effet, si $a' \in C'$, alors $a' \in C' \cap D\ell_K^m = C \cap D\ell_K^{m'}$, il en résulte que $a' \in C$, ainsi $a \in C$ car $a/a' \in C$. L'isomorphisme provient du fait que nous pouvons échanger les rôles de $D\ell_K^m/C$ et $D\ell_K^{m'}/C'$, qui sont finis. □

Notons $\mathcal{C}$ une classe de sous-modules de congruences de K, pour tout $(m,C) \in \mathcal{C}$, nous disons que m est un module de définition de la classe $\mathcal{C}$. Nous notons $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ l'ensemble des modules de définition d'une classe $\mathcal{C}$.

Remarque :

Si $(m,C) \simeq (m',C')$ avec un même module de définition m, alors $C = C'$. Donc à module fixé, chaque classe $\mathcal{C}$ contient un élément (m,C) au plus.

Lemme 4.2.2. *Soit (m,C) un module de congruences, n un diviseur de m. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que $(m,C) \sim (n, CP\ell_K^{(n)})$ est que nous ayons :*

$$P\ell_K^{(n)} \cap D\ell_K^m \subset C.$$

Démonstration. Supposons $P\ell_K^{(n)} \cap D\ell_K^m \subset C$; le but est de montrer $(m,C) \sim (n, CP\ell_K^{(n)})$ à savoir $D\ell_K^m \cap CP\ell_K^{(n)} = D\ell_K^n \cap C = C$, compte tenu du fait que nous avons $n|m$. Soit $c\psi(\alpha) \in D\ell_K^m \cap CP\ell_K^{(n)}$ avec $c \in C$ et $\psi(\alpha) \in P\ell_K^{(n)}$. Comme $c \in C$, nous avons $c \in D\ell_K^m$ ainsi $\psi(\alpha) \in D\ell_K^m \cap P\ell_K^{(n)}$. Finalement en utilisant l'hypothèse nous obtenons $\psi(\alpha) \in C$.

Réciproquement supposons que $(m,C) \sim (n, CP\ell_K^{(n)})$, montrons qu'alors $P\ell_K^n \cap D\ell_K^m \subset C$. Soit $\psi(\alpha) \in P\ell_K^{(n)}$ et $\psi(\alpha)$ premier à m ; alors $\psi(\alpha) \in D\ell_K^m \cap CP\ell_K^{(n)} = C$ par hypothèse. □

Théorème 4.2.1. *Soit (m,C) dans une classe donnée de K. Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'un diviseur n de m soit un élément de $\mathcal{M}_\mathcal{C}$ est $P\ell_K^{(n)} \cap D\ell_K^m \subset C$. Lorsque cette condition est réalisée, alors nous avons $(n, CP\ell_K^{(n)}) \in \mathcal{C}$.*

Démonstration. Si la condition est vérifiée, le lemme précédent nous dit $(n, CP\ell_K^{(n)}) \in \mathcal{C}$, donc $n \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$. Réciproquement, s'il existe C' tel que $(n, C') \sim (m, C)$, nous prenons $\psi(\alpha) \in P\ell_K \cap D\ell_K^m$, et comme $P\ell_k^{(n)} \subset C'$, il en résulte que $\psi(\alpha) \in C' \cap D\ell_K^m$; or $C' \cap D\ell_K^m = C \cap D\ell_K^n$ par hypothèse, d'où $\psi(\alpha) \in C$.

□

Théorème 4.2.2. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de congruences de K, si n et n' appartiennent à $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$, alors $n = pgcd(n, n') \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$. Il existe donc dans $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ un unique élément $\widetilde{\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}}$ minimum pour la relation de divisibilité restreinte à $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$. Cet élément est appelé le conducteur logarithmique de la classe $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. Soient (n', C') et (n'', C'') appartenant à $\mathcal{C}$. Posons $m = nn'$ et considérons (m, C) avec $C = C' \cap D\ell_K^m$; alors $(m, C) \in \mathcal{C}$ car $(m, C) \sim (n', C')$. Traduisons les équivalences $(m, C)) \sim (n', C')$ et $(m, C) \sim (n'', C'')$ en utilisant la condition équivalente du théorème précédent, nous avons :

$$P\ell_K^{(n')} \cap D\ell_K^m$$

$$P\ell_K^{(n'')} \cap D\ell_K^m.$$

Soit $n = \mathrm{pgcd}(n', n'')$, le but est alors de prouver que $P\ell_K^n \cap D\ell_K^m$. Soit $\alpha \in \mathcal{R}_K^n$ tel que $\psi(\alpha) \in P\ell_K^n \cap D\ell_K^m$. Alors par le théorème de représentation, nous pouvons trouver un $x \in \mathcal{R}_K$ tel que : $x/\alpha \in \mathcal{R}_K^{(n')}$ et $x/\alpha \in \mathcal{R}_K^{n''}$. Par hypothèse, α est premier à m, et x est premier à n et à n' donc à m. IL suit donc que $x/\alpha \in P\ell_K^{n'} \cap D\ell_K^m \subset C$ et $x/\alpha \in P\ell_K^{n''} \cap D\ell_K^m \subset C$, d'où le résultat. □

Définition 33. *Étant donné $\mathcal{C}$, l'élément $\widetilde{\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}}$ s'appelle le conducteur de la classe $\mathcal{C}$. Il existe donc un unique sous-module de congruences logarithmiques de $\mathcal{C}$ de module $\widetilde{\mathfrak{f}_{\mathcal{C}}}$ et qui est appelé le sous-module de congruences primitif de $\mathcal{C}$.*

Définition 34. *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux classes de congruences de K, et m un module commun de définition de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, alors $(m, C) \in \mathcal{C}$ et $(m, C') \in \mathcal{C}'$:*

i) on dit que $\mathcal{C} \in \mathcal{C}'$ si $C \subset C'$, cette relation est une relation d'ordre

ii)on appelle intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, la classe notée $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ du sous-module $(m, C \cap C')$

iii) on appelle composée de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, la classe notée $\mathcal{C}\mathcal{C}'$ du sous-module de congruences (m, CC').

Démonstration. Pour le cas classique nous renvoyons à [Gr2]I.16.

Il faut montrer que ces définitions ont un sens. Or pour un module fixé (commun à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$), on sait que C et C' sont uniques. Il suffit alors de vérifier que les définitions sont indépendantes du choix de ce module commun m.

Soit m_1 un autre module commun et soient C_1 et C_1' tels que $(m_1, C_1) \in \mathcal{C}_1$ et $(m_1', C_1') \in \mathcal{C}'$; nous avons alors : $D\ell_K^{m_1} \cap C = D\ell_K^m \cap C_1$ et $D\ell_K^{m_1} \cap C' = D\ell_K^m \cap C_1'$ par hypothèse.

i) Soit $a_1 \in C_1$; on peut choisir $\alpha_1 \in P\ell_K^{(m_1)} \subset C_1$ tel que $a_1\alpha_1 \in D\ell_K^m \cap C_1$; $a_1\alpha_1 \in D\ell_K^{m_1} \cap C$ et alors comme par hypothèse$C \subset C'$, nous avons $a_1\alpha_1 \in C'$, soit $a_1\alpha_1 \in C' \cap D\ell_K^{m_1} = D\ell_K^m \cap C_1'$; nous obtenons donc $a_1\alpha_1 \in C_1'$ d'où $a_1 \in C_1'$ puisque $\alpha_1 \in P\ell_K^{(m_1)} \in C_1'$, et $C_1 \in C_1'$.

Nous pouvons aussi vérifier que ceci définit une relation d'ordre : on a $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ car $(m, C) \sim (m, C)$ d'où en particulier $C \subset C$: si nous avons $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}'$, alors $C \subset C'$ et $C' \subset C$ soit $C = C'$ et $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Si nous avons $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}''$, alors nous pouvons superposer m commun aux trois classes et nous aurons $C \subset C'$ et $C' \subset C''$ soit $C \subset C''$ soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}''$.

ii) Il faut comparer $(m_1, C_1 \cap C_1')$ et $(m, C \cap C')$ soit encore $D\ell_K^{m_1} \cap C \cap C'$ et $D\ell_K^m \cap C_1 \cap C_1'$ dont nous voyons directement qu'ils sont égaux étant donné que $(m_1, C_1) \sim (m, C)$ et $(m_1, C_1') \sim (m, C)$.

iii) Comparons ici $D\ell_K^{m_1} \cap CC'$ et $D\ell_K^m \cap C_1C_1'$. Soit $a \in D\ell_K^{m_1} \cap CC'$, alors nous écrivons $a = cc'$, avec $c \in C$ et $c' \in C'$; dans la classe de c (respectivement c') modulo $P\ell_K^{(m)}$ soit c_1 (respectivement c_1') premier à m_1. Nous avons donc $c = \alpha c_1$ et $c' = \alpha' c_1'$ avec α et $\alpha' \in P\ell_K^m$ et $c_1 \in D\ell_K^{m_1} \cap C = D\ell_K^m \cap C_1$ et de même $c_1' \in D\ell_K^m \cap C_1'$. Nous obtenons donc $a = \alpha\alpha' c_1c_1'$ avec $c_1c_1' \in D\ell_K^m \cap C_1C_1'$; comme $a \in D\ell_K^{m_1}$ et que $c_1c_1' \in C_1C_1' \subset D\ell_K^{m_1}$, il en résulte que or $\alpha\alpha' \in D\ell_K^{m_1}$, or $\alpha\alpha' \in P\ell_K^{(m)} \subset C \cap C'$ donc $\alpha\alpha'$ est dans $D\ell_K^{m_1} \cap C \cap C' = D\ell_K \cap C_1 \cap C_1'$, d'où le résultat (l'autre inclusion s'établissant de façon analogue).

□

Définition 35. *Soit K' une extension quelconque de K et soit $\mathcal{C}$ une classe de congruences de K, on appelle relèvement normique de $\mathcal{C}$ dans K' , la classe $\mathcal{C}'$ de K' ainsi définie : soit $(m, C) \in \mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}'$ est la classe de (m', C') avec m' l'étendu à K' de m et $C' = \{a' \in D\ell_{K'}^{m'}, N_{K'}(a') \in C\}$. On pose $(m', C') = N_{K'}^{-1}(m, C)$ et $\mathcal{C}' = N_{K'}^{-1}(\mathcal{C})$.*

Démonstration. Pour le cas classique, nous renvoyons à [Gr2]I.17.

Si $(m_1, C_1) \in \mathcal{C}$ est un autre représentant de $\mathcal{C}$, montrons que dans K' $(m_1', C_1') \sim (m', C')$ (en désignant de même $N_{K'}^{-1}(m_1, C_1)$ par (m_1', C_1')).

Si $a' \in C' \cap D\ell_{K'}^{m_1'}$, alors $N_{K'}a' \in C$ mais a' est premier à m_1' donc $N_{K'}a' \in D\ell_K^{m_1}$ et par suite $N_{K'}a' \in C \cap D\ell_K^{m_1} = C_1 \cap D\ell_K^m$ et $N_{K'}a' \in C_1$; comme a' est premier à m_1', nous trouvons bien que $a' \in C_1'$; comme nous avons $a' \in C'$, nous avons aussi $a' \in C_1' \cap D\ell_{K'}^{m'}$, d'où le résultat (par symétrie). □

4.3 La correspondance du corps des classes

Nous considérons la correspondance suivante : à toute ℓ-extension abélienne L de K, nous associons la classe $\mathcal{C}_{L/K}$ du sous-module de congruences $(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, P\ell_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}} \cdot N_{L/K}(D\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}})$ c'est-à-dire la classe du sous-module de congruences $(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$. Le but de cette partie est de montrer que cette application constitue une bijection entre les ℓ-extensions abéliennes finies de K et les classes de congruences.

Définition 36. *Soit (m, C) un groupe de congruences quelconque de K, alors on dit qu'une ℓ-extension abélienne finie L de K est corps de classes sur K pour (m, C) si $(m, C) \in \mathcal{C}_{L/K}$ i.e $(m, C) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, T\ell_{L/K})$.*

Lemme 4.3.1. *Soit L une ℓ-extension de K, corps des classes pour le sous-module de congruences (m, C) ; si C' est un sous-module de $D\ell_K^m$ tel que l'on ait $C \subset C' \subset D\ell_K^m$, alors il existe un sous-corps L' de L contenant K corps de classes pour le sous-module de congruences (m, C')*

Démonstration. On a par hypothèse que $(m, C) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$ donc par définition de la relation d'équivalence $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}} \cap C = A\ell_{L/K} \cap D\ell_K^m$. Notons H l'image par l'application d'Artin logarithmique du sous groupe $C' \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ de $D\ell_K^m$. H est un sous-groupe du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/K)$ de l'extension, et on note L' son corps des points fixes.

Notons $\tilde{\mathfrak{f}}_{L'/K}$ le conducteur global de l'extension L'/K, alors on a $\tilde{\mathfrak{f}}_{L'/K} | \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$. Le but est de prouver que L' est corps des classes pour (m, C'), ce qui signifie :

$$(m, C') \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L'/K}, A\ell_{L'/K}) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L'/K, \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}})$$

à savoir que $C' \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}} = D\ell_K^m \cap A\ell_{L'/K, \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$.

Soit $a' \in C' \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$, alors $(\widetilde{\frac{L/K}{a'}}) \in H$ et $(\widetilde{\frac{L'/K}{a'}}) = 1$, donc $a' \in A\ell_{L'/K, \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. De plus par hypothèse, on sait que $a' \in C'$, avec $C' \subset D\ell_K^m$, ainsi on en déduit que $a' \in D\ell_K^m \cap A\ell_{L'/K, \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$.

Réciproquement, considérons $a' \in D\ell_K^m \cap A\ell_{L'/K, \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ alors $(\widetilde{\frac{L'/K}{a'}}) = 1$ et $(\widetilde{\frac{L/K}{a'}}) \in H$. Or H est l'image du sous-groupe $C' \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$, par suite il existe donc $b' \in C' \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ tel que$(\widetilde{\frac{L/K}{a'}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{b'}})$, à savoir $(\widetilde{\frac{L/K}{a'b'^{-1}}}) = 1$. On en déduit alors que $a'b'^{-1} \in A\ell_{L/K}$ et $a'b'^{-1} \in D\ell_K^m$. Finalement $a'b'^{-1} \in A\ell_{L/K} \cap D\ell_K^m$, or $A\ell_{L/K} \cap D\ell_K^m = C \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$, puisque par hypothèse que $(m, C) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$. Il suit que $a'b'^{-1} \in C \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. De part l'inclusion $C \in C'$, on obtient que $a'b'^{-1} \in C' \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ et finalement $a' \in C' \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. $\square$

Corollaire 9. *Si L est corps de classes pour $\mathcal{C}$, et si $\mathcal{C}'$ est une classe de congruences telle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$, alors il existe un corps L', avec $K \subset L' \subset L$, corps des classes pour $\mathcal{C}'$.*

Lemme 4.3.2. *Soient L et L' deux ℓ-extensions abéliennes de K, soit m un module quelconque de K , alors on a les propriétés suivantes :*

i) $A\ell_{LL/K',m} = A\ell_{L/K,m} \cap A\ell_{L'/K,m}$

ii) $L \subset L'$ équivaut à $A\ell_{L'/K,m} \subset A\ell_{L/K,m}$

iii) Si K' est une extension de K, alors on a $A\ell_{LK'/K',m\widetilde{\mathfrak{f}_{L/K}}} = \{a' \in D\ell_{K'}^{m\widetilde{\mathfrak{f}_{L/K}}}(K'),\ N_{K'/K}(a') \in A\ell_{L/K,m}\}$.

Démonstration. i) On considère $\mathrm{Gal}(\widetilde{LL'/K})$ comme isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L/K) \times \mathrm{Gal}(L'/K)$, via l'application $(\frac{\widetilde{LL'/K}}{\cdot}) \to (\frac{\widetilde{L/K}}{\cdot}) \times (\frac{\widetilde{L'/K}}{\cdot})$. De plus si $a \in A\ell_{LL'/K,m}$, alors $a \in A\ell_{LL'/K}$ i.e a est premier à $\widetilde{\mathfrak{f}_{LL'/K}}$, donc à $\widetilde{\mathfrak{f}_{L/K}}$ et $\widetilde{\mathfrak{f}_{L'/K}}$. Réciproquement si a est premier avec $\widetilde{\mathfrak{f}_{L/K}}$ et $\widetilde{\mathfrak{f}_{L'/K}}$, alors par la propagation de la non-ramification logarithmique, a est premier avec $\widetilde{\mathfrak{f}_{LL'/K}}$. Ainsi $a \in A\ell_{LL'/K,m}$ équivaut à $a \in A\ell_{L/K,m} \cap A\ell_{L'/K,m}$.

ii) Si $L \subset L'$ alors $A\ell_{L'/K,m} \subset A\ell_{L/K,m}$ d'après le i) de la proposition précédente.

Réciproquement supposons que $A\ell_{L'/K,m} \subset A\ell_{L/K,m}$, alors d'après i) $A\ell_{LL'/K,m} = A\ell_{L/K,m} \cap A\ell_{L'/K,m}$, il s'ensuit alors que $A\ell_{LL'/K,m} = A\ell_{L'/K,m}$. Considérons alors le module $m' = m\widetilde{\mathfrak{f}_{LL'/K}}$; on a alors les égalités :

$$A\ell_{LL'/K,m'} = A\ell_{LL'/K,m} \quad \text{et} \quad A\ell_{L'/K,m'} = A\ell_{L'/K,m}.$$

En effet, $A\ell_{LL'/K,m'} = A\ell_{LL'/K} \cap D\ell_K^{m'} = A\ell_{LL'/K} \cap D\ell_K^m \cap D\ell_K^{\widetilde{\mathfrak{f}_{LL'/K}}}$ de part la définition de m'. D'où $A\ell_{LL'/K,m'} = A\ell_{LL'/K,m} \cap D\ell_K^{\widetilde{\mathfrak{f}_{LL'/K}}}$. Or $A\ell_{LL'/K,m} \subset D\ell_K^{\widetilde{\mathfrak{f}_{LL'/K}}} \cap D\ell_K^m$. D'où la première égalité.

De même $A\ell_{K'/K,m'} = A\ell_{K'/K,m} \cap D\ell_K^{\widetilde{\mathfrak{f}_{LL'/K}}}$. Or $A\ell_{L'/K,m} \subset A\ell_{L/K,m} \cap D\ell_K^{\widetilde{\mathfrak{f}_{L'/K}}} \cap D\ell_K^m \subset D\ell_K^{\widetilde{\mathfrak{f}_{L/K}}} \cap D\ell_K^{\widetilde{\mathfrak{f}_{L'/K}}} \cap D\ell_K^m = D\ell_K^{\widetilde{\mathfrak{f}_{LL'/K}}} \cap D\ell_K^{\widetilde{\mathfrak{f}_{L'/K}}} \cap D\ell_K^m$ ceci par l'hypothèse $A\ell_{L'/K,m} \subset A\ell_{L/K,m}$. D'où la deuxième égalité.

Alors d'après le théorème précédent appliqué à m', on a :

$$(D\ell_K^{m'} : A\ell_{LL'/K,m'}) = [LL' : K] \qquad \text{et} \qquad (D\ell_K^{m'} : A\ell_{K'/K,m'}) = [L' : K]$$

soit $LL' = L'$, c'est-à-dire $L \subset L'$.

iii)$a' \in A\ell_{LK'/K',m\widetilde{\mathfrak{f}_{L/K}}}$ si et seulement si $a' \in D\ell_{K'}^{m\widetilde{\mathfrak{f}_{L/K}}}$ et $(\frac{\widetilde{LK'/K'}}{a'}) = 1$ d'où le résultat d'après le iii) de la proposition précédente.

□

Théorème 4.3.1. *Le théorème de correspondance*

L'application qui à une ℓ-extension abélienne finie L de K associe la classe $\mathcal{C}_L$ du sous-module de congruences $(\widetilde{\mathfrak{f}_{L/K}, T\ell_{L/K}})$ est une application de l'ensemble des ℓ-extensions abéliennes de degré fini de K dans celui des classes de congruences de K, qui a les propriétés suivantes (L,L' désignant des ℓ-abéliennes de K) :

i) elle est bijective

ii) $L \subset L'$ équivaut à $\mathcal{C}_{L'} \subset \mathcal{C}_L$,

iii) $\mathcal{C}_{LL'} = \mathcal{C}_L \cap \mathcal{C}_{L'}$

iv) $\mathcal{C}_{L\cap L'} = \mathcal{C}_L\mathcal{C}_{L'}$

v) pour toute extension K' de K, on a $\mathcal{C}_{KK'/K} = N^{-1}_{K'/K}\mathcal{C}_{K'}$; en particulier si $K \subset K' \subset L$, alors $\mathcal{C}_{L/K'} = N^{-1}_{K'}\mathcal{C}_L$.

Démonstration. Montrons d'abord l'injectivité.

Soient L et L' corps de classes pour la même classe $\mathcal{C}$, alors nous avons

$$(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K}) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L'/K}, A\ell_{L'/K}).$$

Soit m un multiple de $\tilde{\mathfrak{f}}_{LL'/K}$; nous obtenons donc

$$(m, A\ell_{L/K,m}) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K}) \text{ et } (m, A\ell_{L'/K,m}) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L'/K}, A\ell_{L'/K}).$$

Il s'ensuit alors que $(m, A\ell_{L/K,m}) \sim (m, A\ell_{L'/K,m})$ à savoir $A\ell_{L/K,m} = A\ell_{L'/K,m}$, ce qui équivaut à $L = L'$ d'après le lemme 7.3.1.

Montrons ensuite la surjectivité.

Étant donné (m, C) un module de congruences, alors par définition : $P\ell_K^{(m)} \subseteq C \subseteq D\ell_K^m$, avec $P\ell_K^{(m)} \simeq \mathcal{R}_K^{(m)}/\widetilde{\mathcal{U}}_K$ et $D\ell_K^m \simeq \mathcal{J}_K^m/\widetilde{\mathcal{U}}_K$. Ainsi la pré-image de C dans le groupe des idèles, par ψ, est un sous-module fermé de $\mathcal{J}_K^m$ contenant $\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K^{(m)}$.

Montrons que

$$\mathcal{J}_K^m/\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K^{(m)} \simeq \mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)}.$$

L'égalité du lemme 7.3.1 $\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K^{(m)} = \widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)}\mathcal{R}_K^m$ nous donne l'isomorphisme suivant :

$$\mathcal{J}_K^m/\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K^{(m)} \simeq \mathcal{J}_K^m/\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)}\mathcal{R}_K^m.$$

De plus, comme par le lemme d'approximation $\mathcal{J}_K = \mathcal{J}_K^m\mathcal{R}_K$, nous avons :

$$\mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)} \simeq \mathcal{J}_K^m\mathcal{R}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)}\mathcal{R}_K = \mathcal{J}_K^m\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)}\mathcal{R}_K/\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)}\mathcal{R}_K$$

ainsi en utilisant le théorème d'isomorphisme des groupes

$$\mathcal{J}_K/\mathcal{R}_K\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)} \simeq \mathcal{J}_K^m/\mathcal{J}_K^m \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)}\mathcal{R}_K \simeq \mathcal{J}_K^m/\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)}\mathcal{R}_K^m.$$

Il suit alors que la préimage de C dans le groupe des idèles est un sous-module fermé de $\mathcal{J}_K$ contenant $\mathcal{R}_K\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)}$. Or nous savons qu'il existe une bijection entre les sous-modules fermés d'indice fini de $\mathcal{J}_K$ contenant $\mathcal{R}_K$ et les ℓ-extensions abéliennes finies de K : ainsi il existe L une ℓ-extension abélienne finie telle que :

$$\mathrm{Gal}(L/K) \simeq \mathcal{J}_K/N_{L/K}\mathcal{J}_L\mathcal{R}_K \simeq \mathcal{J}_K^m/N_{L/K}\mathcal{J}_L^m\mathcal{R}_K^m$$

c'est-à-dire telle que $\psi^{-1}(C) = N_{L/K}\mathcal{J}_L^m\mathcal{R}_K^m$.

Par conséquent le groupe des normes locales est :

$$\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \cap \psi^{-1}(C) = \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \cap N_{L/K}\mathcal{J}_L^m\mathcal{R}_K^m = N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}.$$

Il contient donc $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K^{(m)}$ puisque $\psi^{-1}(C)$ le contient.

Ainsi pour $\mathfrak{p}|m$, nous avons $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^{v_\mathfrak{p}(m)} \subseteq N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}$. De part la définition du conducteur logarithmique local, nous en déduisons donc que si $\mathfrak{p}|m$ alors $\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p}|m$.

D'autre part, pour $\mathfrak{p} \not| m$, alors nous avons $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}} \subseteq N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}}\mathcal{R}_{L_\mathfrak{P}}$ puisque $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}} \subseteq \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \cap \widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K^m$, ce qui implique que l'extension locale est alors logarithmiquement non ramifiée.

En conclusion, nous en déduisons donc que $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}|m$.

Notre but est de montrer que $(m, C) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$.

Mais compte-tenu de la relation de divisibilité, il suffit de prouver que : $C = D\ell_K^m \cap A\ell_{L/K}$, avec $C = N_{L/K}D\ell_L^m P\ell_K^m$ et $A\ell_{L/K} = P\ell_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})} \cdot N_{L/K}(D\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}})$. Comme $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}|m$, $D\ell_K^m \subseteq D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ et $D\ell_K^m \cap P\ell_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})} = P\ell_K^m$, nous en déduisons bien : $C = D\ell_K^m \cap A\ell_{L/K}$.

Finalement, L est une ℓ-extension abélienne finie telle que $(m, C) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$: sa classe de congruences est donc celle de (m, C) d'où la surjectivité de l'application.

Pour les assertions suivantes, nous choisissons m un module commun aux classes $\mathcal{C}_L$, $\mathcal{C}_{L'}$, $\mathcal{C}_{LL'}$, $\mathcal{C}_L \cap \mathcal{C}_{L'}$ (par exemple nous prenons m un multiple de $\tilde{\mathfrak{f}}_{LL'/K}$). Nous avons donc :

$(m, A\ell_{L/K,m}) \in \mathcal{C}_L$,

$(m, A\ell_{L'/K,m}) \in \mathcal{C}_{L'}$,

$(m, A\ell_{LL'/K,m}) \in \mathcal{C}_{LL'}$,

$(m, A\ell_{L\cap L'/K,m}) \in \mathcal{C}_{L\cap L'}$.

Pour ii), le lemme précédent ii) montre que $L \subset L'$ équivaut à $A\ell_{L'/K,m} \subset A\ell_{L/K,m}$, soit $\mathcal{C}_{L'} \subset \mathcal{C}_L$ par définition de l'inclusion des classes.

Pour iii), le lemme précédent i) conduit à $A\ell_{LL'/K} \cap D\ell_K^m = A\ell_{L/K,m} \cap A\ell_{L',m}$, soit $\mathcal{C}_{LL'} = \mathcal{C}_L \cap \mathcal{C}_{L'}$.

Pour iv) On utilise la remarque de Gras transposée dans le cas logarithmique, à savoir : $\mathcal{C}_L\mathcal{C}_{L'} = \bigcap_{\mathcal{C}_L\subset\mathcal{C},\, \mathcal{C}_{L'}\subset\mathcal{C}} \mathcal{C}$, le théorème d'existence relative 7.10.1 montre que pour chaque $\mathcal{C}$ il existe $M_\mathcal{C} \subset L \cap L'$ corps de classes pour $\mathcal{C}$, et on a donc d'après le iii) $\cap_\mathcal{C}\mathcal{C} = \mathcal{C}_M$ où

M est le composé des $M_{\mathcal{C}}$. On a donc $M \subset L \cap L'$, ce qui conduit à $\mathcal{C}_{L\cap L'} \subset \mathcal{C}_M = \mathcal{C}_L\mathcal{C}_{L'}$. Comme $L \cap L' \subset L$ et $L \cap L' \subset L'$, on en déduit que $\mathcal{C}_L \subset \mathcal{C}_L\mathcal{C}_{L'}$ et $\mathcal{C}_{L'} \subset \mathcal{C}_L\mathcal{C}_{L'}$ d'où l'égalité énoncée.

Pour v), la classe de $\mathcal{C}_{KK'/K}$ contient un groupe de la forme $(m', A\ell_{KK'/K,m'})$ où m' est par exemple l'étendue à K' d'un module m de K , multiple du conducteur, le lemme précédent conduit alors à $(m', A\ell_{KK'/K,m'}) = N_{K'}^{-1}(m, A\ell_{K,m})$ d'où le résultat. □

Théorème 4.3.2. *Le théorème de décomposition*

Soit L/K une ℓ-extension abélienne finie, corps de classes pour le groupe de congruences (m, C), $\mathfrak{p}$ étant une place finie de K ne divisant pas m, alors :

$\mathfrak{p}$ est totalement décomposée dans L si et seulement si $\mathfrak{p} \in C$.

Démonstration. Si $\mathfrak{p}$ est totalement décomposée dans L alors $\mathfrak{p}$ est une norme, donc dans le noyau de l'application d'Artin logarithmique. Comme par hypothèse $\mathfrak{p}$ ne divise pas m, nous avons : $\mathfrak{p} \in A\ell_{L/K} \cap D\ell_K^m$. De plus L étant corps de classes pour le groupe de congruences (m, C), nous savons que : $(m, C) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$, à savoir $A\ell_{L/K} \cap D\ell_K^m = C \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. Par suite $\mathfrak{p} \in C$.

Réciproquement, supposons que $\mathfrak{p} \in C$. Comme $(m, C) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$, il existe un module de restriction commun à C et à $A\ell_{L/K}$ (par exemple $m' = \text{pgcd}(m, \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})$), ainsi $\mathfrak{p} \in A\ell_{L/K} = P\ell_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})} N_{L/K}(D\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}})$. Nous écrivons alors $\mathfrak{p} = \psi(\alpha)N_{L/K}(\mathfrak{U})$ avec $\mathfrak{U} \in D\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ et $\alpha \in \mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})}$. (L'application ψ a été définie dans la démonstration du théorème sur la calcul de l'indice du groupe de Takagi logarithmique). Alors α est une norme locale partout : en effet si $\mathfrak{p}'|\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$, de part la définition du conducteur, $\alpha_{\mathfrak{p}'} \in \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^{v_\mathfrak{p}(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})}$ est une norme locale. De plus si $\mathfrak{p}' \not|\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$, alors l'extension locale est logarithmiquement non ramifiée, donc les unités logarithmiques sont normes par application du théorème 1.0.2, ainsi que l'uniformisante. Comme $\tilde{v}_\mathfrak{p} \circ N_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} = \tilde{f}_\mathfrak{p}.\mathbb{Z}_\ell$, il s'ensuit que $\psi(\alpha)$ est une norme. Finalement, $\mathfrak{p}$ est norme, donc son sous-groupe de décomposition est trivial, et $\mathfrak{p}$ est une place totalement décomposée. □

Corollaire 10. *Si L , une ℓ-extension abélienne de K, est corps de classes sur K pour la classe de congruences $\mathcal{C}$, alors toute place de K logarithmiquement ramifiée dans L (i.e divisant $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$) divise aussi $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. Notons $(\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathcal{C}}, C)$ le sous-module de congruences primitif de $\mathcal{C}$, qui correspond à L. Soit $\mathfrak{p}$ divisant $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$, mais ne divisant pas $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathcal{C}}$. Désignons par M le corps d'inertie logarithmique pour $\mathfrak{p}$ dans L/K. Alors L est corps de classes sur M pour le groupe de congruences $(\tilde{\mathfrak{f}}'_{\mathcal{C}}, C')$, avec $C' = N_M^{-1}(C)$. Soit $\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}$ dans M/K, étant une place logarithmiquement ramifié dans L/M, $\mathfrak{p}' = N_{L/M}(\mathfrak{P})$ avec $\mathfrak{P} \in D\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathcal{C}}}$. Alors dans la classe de β mod $P\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathcal{C}}}$, le lemme de représentation permet de trouver un élément $\mathfrak{U}$ premier à

$\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$. Ainsi $\beta\mathfrak{U}^{-1} \in P\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}_\mathcal{C}}$ et $\mathfrak{p}' N_{L/M}\mathfrak{U}^{-1} \in P\ell_M^{\tilde{\mathfrak{f}}_\mathcal{C}}$. Finalement, $\mathfrak{p}' \in P\ell_M^{\tilde{\mathfrak{f}}_\mathcal{C}} N_{L/M} D\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$, et par suite $N_M\mathfrak{p}' \in P\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_\mathcal{C}} N_L D\ell_L^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. Or par hypothèse $(\tilde{\mathfrak{f}}_\mathcal{C}, C) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$, à savoir $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_\mathcal{C}} \cap A\ell_{L/K} = C \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. Compte tenu de la relation de divisibilité i.e $\tilde{\mathfrak{f}}_\mathcal{C} | \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$, on a $A\ell_{L/K} = C \cap D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. On a donc $N_M(\mathfrak{p}') \in C$: en effet $P\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_\mathcal{C}} \subset C$, une norme est dans $A\ell_{L/K}$ donc dans C. Finalement $\mathfrak{p}' \in C'$, d'après le théorème de décomposition, on en déduirait que $\mathfrak{p}$ serait logarithmiquement décomposée dans L/M, ce qui est absurde puisque par hypothèse cette place est totalement log-ramifiée. □

4.4 Le symbole de Hasse logarithmique

Nous introduisons, dans cette partie, le symbole de Hasse logarithmique analogue du symbole de Hasse classique dans le contexte logarithmique. Nous nous intéressons à l'image et au noyau de cet homomorphisme. Le but étant d'aboutir à l'égalité entre le conducteur logarithmique global d'une ℓ-extension abélienne finie L/K et le conducteur primitif associé à la classe de congruences $(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$, ce qui constitue le théorème principal de cette section.

Définition 37. *Soient L une ℓ-extension abélienne finie de K, $\alpha \in \mathcal{R}_K$ et $\mathfrak{p}$ une place de K. Notons $\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p}$ le conducteur logarithmique local associé à $\mathfrak{p}$ et $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ le conducteur logarithmique global de l'extension L/K. Considérons $\beta \in \mathcal{R}_K$ vérifiant*

$$\frac{\beta}{\alpha} \in \mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p})} \text{ et } \beta \in \mathcal{R}_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p}})}.$$

L'existence d'un tel β est assurée par le théorème d'approximation. Nous dirons que β est un $\mathfrak{p}$-associé logarithmique de α. Nous écrivons alors $\psi(\beta) = \mathfrak{p}^{\mathfrak{a}} a$ avec a premier à $\mathfrak{p}$ et $a \in D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$.

Nous définissons le symbole $(\widetilde{\frac{\alpha, L/K}{\mathfrak{p}}})$ de la façon suivante :

$$(\widetilde{\frac{\alpha, L/K}{\mathfrak{p}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{a}}).$$

Ce symbole est appelé le symbole de Hasse logarithmique pour $\mathfrak{p}$ dans L/K et il est défini sur $\mathcal{R}_K$. Dans le cas particulier où $\widetilde{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}} = 1$, nous remplaçons la condition $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathcal{R}_K^{(1)}$ par $\frac{\beta}{\alpha}$ est premier à $\mathfrak{p}$.

Remarque :

Vérifions que le résultat ne dépend pas du choix du $\mathfrak{p}$-associé de α. Si β' est un autre $\mathfrak{p}$-associé de α, alors nous avons $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathcal{R}_K^{(\widetilde{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}})}$ et $\beta \in \mathcal{R}_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p}})}$ et $\frac{\beta'}{\alpha} \in \mathcal{R}_K^{(\widetilde{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}})}$ et $\beta' \in \mathcal{R}_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p}})}$, à savoir $\frac{\beta'}{\beta} \in \mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p})}$ et $\frac{\beta'}{\beta} \in \mathcal{R}_K^{(\frac{\widetilde{\mathfrak{f}_{L/K}}}{\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p}})}$. Finalement, nous avons donc $\frac{\beta'}{\beta} \in \mathcal{R}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. Écrivons $\psi(\beta') = \mathfrak{p}^{\mathfrak{a}'}a'$, nous en déduisons alors que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$. Finalement, $\psi(\frac{a'}{a}) \in P\ell_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})}$. Il suit que $(\widetilde{\frac{L/K}{a}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{a'}})$ car $P\ell_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})} \in A\ell_{L/K}$.

Proposition 4.4.1. *Le symbole logarithmique de Hasse pour $\mathfrak{p}$ a les propriétés suivantes :*
i) c'est un homomorphisme de $\mathcal{R}_K$ dans Gal(L/K)
ii) si $\mathfrak{p} \not| \widetilde{\mathfrak{f}_{L/K}}$, alors $(\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{\mathfrak{p}}})^{-\mathfrak{a}}$ où $\psi(\alpha) = \mathfrak{p}^{\mathfrak{a}}a$ avec a premier à $\mathfrak{p}$
iii) la restriction de $(\widetilde{\frac{.,L/K}{\mathfrak{p}}})$ à $M \subset L$ est $(\widetilde{\frac{.,M/K}{\mathfrak{p}}})$.

Démonstration. i) β et β' étant des $\mathfrak{p}$-associés de α et α', alors $\beta\beta'$ est un $\mathfrak{p}$-associé de $\alpha\alpha'$. De l'écriture $\psi(\beta) = \mathfrak{p}^{\mathfrak{a}}a$ et $\psi(\beta') = \mathfrak{p}^{\mathfrak{a}'}a'$, nous en déduisons que $\psi(\beta\beta') = \mathfrak{p}^{\mathfrak{a}}\mathfrak{p}^{\mathfrak{a}'}aa'$. Il suit alors que $(\widetilde{\frac{\alpha\alpha',L/K}{\mathfrak{p}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{aa'}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{a}})(\widetilde{\frac{L/K}{a'}}) = (\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}})(\widetilde{\frac{\alpha',L/K}{\mathfrak{p}}})$ car l'application d'Artin logarithmique est un homomorphisme.
ii) Comme par hypothèse $\mathfrak{p} \not| \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$, nous avons que $\tilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p} = 1$. Par définition β un $\mathfrak{p}$-associé de α vérifie : $\frac{\beta}{\alpha}$ est premier à $\mathfrak{p}$ et $\beta \in\in \mathcal{R}_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. Ainsi $\psi(\beta) = \mathfrak{p}^{\mathfrak{a}}a \in P\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$. Alors $(\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{a}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{\psi(\beta\mathfrak{p}^{-\mathfrak{a}})}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{\psi(\beta)}})(\widetilde{\frac{L/K}{\mathfrak{p}^{-\mathfrak{a}}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{\mathfrak{p}^{-\mathfrak{a}}}})$ car l'autre terme est dans le noyau du morphisme d'Artin logarithmique.
iii) Soit β un $\mathfrak{p}$-associé de α dans L/K, alors β est encore un $\mathfrak{p}$-associé de α dans M/K pour $M \subset L$. En effet $\tilde{\mathfrak{f}}_{M/K}|\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$, de même $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p},M/K}|\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p},L/K}$, et $\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{M/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p},M/K}}|\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p},L/K}}$. Nous avons alors, si $\psi(\beta) = \mathfrak{p}^{\mathfrak{a}}a$, $(\widetilde{\frac{\alpha,M/K}{\mathfrak{p}}}) = (\widetilde{\frac{M/K}{a}})$. Or $(\widetilde{\frac{M/K}{a}})$ est la restriction de $(\widetilde{\frac{L/K}{a}}) = (\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}})$ à M. □

Théorème 4.4.1. *L'image de $\mathcal{R}_K$ par le symbole de Hasse logarithmique pour $\mathfrak{p}$ dans L/K est égale au sous-groupe de décomposition pour $\mathfrak{p}$ dans L/K.*

Démonstration. Nous rappelons ici que pour une place $\mathfrak{p}$ de K, être complètement décomposée au sens classique ou au sens logarithmique c'est la même chose. Désignons alors par M le corps de décomposition de $\mathfrak{p}$, alors $\mathfrak{p}$ est logarithmiquement non ramifiée dans M/K : par la proposition précédente ii) et iii), nous en déduisons $(\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}})$ restreint à M est $(\widetilde{\frac{\alpha,M/K}{\mathfrak{p}}})$ et $(\widetilde{\frac{\alpha,M/K}{\mathfrak{p}}}) = (\widetilde{\frac{M/K}{\mathfrak{p}^{-\mathfrak{a}}}}) = (\widetilde{\frac{M/K}{\mathfrak{p}}})^{-\mathfrak{a}}$. Or $(\widetilde{\frac{M/K}{\mathfrak{p}}})^{-\mathfrak{a}}$ est le Frobenius logarithmique en M : de part la définition de M, nous avons donc $(\widetilde{\frac{M/K}{\mathfrak{p}}})^{-\mathfrak{a}} = 1$ et $(\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}}) \in \mathrm{Gal}(L/M)$: donc l'image du symbole de Hasse logarithmique est contenue dans le sous groupe de décomposition.

Réciproquement, il nous faut montrer que le symbole de Hasse logarithmique est surjectif sur le sous-groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$. Désignons alors par I le corps d'inertie logarithmique de $\mathfrak{p}$, à savoir qui correspond à l'extension maximale logarithmiquement non ramifiée :

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, dash, "\tilde{e}_{\mathfrak{p}}"] \\
I \arrow[d, dash, "\tilde{f}_{\mathfrak{p}}"] \\
M \arrow[d, dash] \\
K
\end{tikzcd}$$

Considérons $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/M) \subset \mathrm{Gal}(L/K)$, alors par la surjectivité de l'application d'Artin logarithmique, nous pouvons trouver $b \in D\ell_k^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ tel que $(\widetilde{\frac{L/K}{b}}) = \sigma$. Le but est alors de montrer que $(\widetilde{\frac{L/K}{b}})$ se met sous la forme $(\widetilde{\frac{\alpha, L/K}{\mathfrak{p}}})$. Or σ restreint à M c'est l'identité, donc $(\widetilde{\frac{M/K}{b}}) = 1$, et ainsi $(\widetilde{\frac{I/K}{b}}) \in \mathrm{Gal}(I/M)$. Or nous savons que $(\widetilde{\frac{I/K}{\mathfrak{p}}})$ est le Frobenius logarithmique en $\mathfrak{p}$ dans I/K, donc il est d'ordre $\tilde{f}_{\mathfrak{p}}$ et engendre le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(I/M)$. Par suite il existe donc une puissance $\mathfrak{p}^a$ de $\mathfrak{p}$ telle que $\mathfrak{p}^a b \in A\ell_{I,(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$. L'égalité du lemme suivant $A\ell_K P\ell_K^{(\widetilde{\frac{\mathfrak{f}_{L/K}}{\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}}})} = A\ell_{I,(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$ permet alors d'écrire : $\mathfrak{p}^a b = \psi(\alpha) c$ avec $\alpha \in \mathcal{R}_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$ et $c \in A\ell_K$. Nous considérons alors $(\frac{\alpha, L/K}{\mathfrak{p}})$: α est un $\mathfrak{p}$-associé de lui même, et nous avons $\psi(\alpha) = \mathfrak{p}^a = bc^{-1}$. Ainsi $(\widetilde{\frac{\alpha, L/K}{\mathfrak{p}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{bc^{-1}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{b}})$. $\square$

Lemme 4.4.1. *Si I est le corps d'inertie logarithmique dans L/K, pour la place $\mathfrak{p}$ de K, alors nous avons l'égalité suivante :*

$$A\ell_{L/K} P\ell_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})} = A\ell_{I/K,(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$$

Démonstration. Nous avons d'abord l'inclusion $A\ell_K P\ell_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})} \subset A\ell_{I,(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$: en effet, $I \subset L$ donc $\tilde{\mathfrak{f}}_{I/K} | \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ et $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p},I/K} | \tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p},L/K}$. Or $\mathfrak{p}$ est une place logarithmiquement non ramifiée dans I, donc $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p},I/K} = 1$. Il suit que $\tilde{\mathfrak{f}}_{I/K} | \frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}$, nous en déduisons donc que $P\ell_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})} \subset P\ell_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{I/K})} \subset A\ell_{I/K}$ de part l'égalité des groupes d'Artin et de Takagi. D'autre part $\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}} | \tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$, nous avons donc $D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}} \subset D\ell_K^{\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}}$ et par définition du noyau d'Artin, nous obtenons $A\ell_{L/K} \subset D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}} \subset D\ell_K^{\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}}$. Et comme $I \subset L$, nous avons $A\ell_{L/K} \subset A\ell_{I/K}$, d'où la première inclusion.

Considérons alors les sous-modules de congruences $(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}, A\ell_K P\ell_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})})$ et $(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}, A\ell_{I,(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})})$.

Ainsi nous déduisons de l'inclusion $A\ell_K P\ell_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})} \subset A\ell_{I,(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$, et de la correspondance du corps des classes que : $A\ell_{I,(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$ est associé à I, et $A\ell_K P\ell_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$ est associé à la sous-extension I' intermédiaire entre I et K. Or $\mathfrak{p}$ ne divise pas $(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})$, et le conducteur de la classe de congruences a les mêmes diviseurs premiers que le conducteur logarithmique global : par suite nous en déduisons que $\mathfrak{p}$ est une place logarithmiquement non ramifiée dans I'. Et de ce fait $I' = I$, nous obtenons alors l'équivalence des deux sous-modules de congruences ci dessus, et finalement l'égalité. □

Proposition 4.4.2. *Caractérisation du noyau du symbole de Hasse logarithmique*

Une condition nécessaire et suffisante pour que $\big(\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}}\big) = 1$, *où* $\alpha \in \mathcal{R}_K$ *est que* α *soit norme locale en* $\mathfrak{p}$.

Démonstration. Supposons que α soit norme locale en $\mathfrak{p}$ alors $\alpha_{\mathfrak{p}} \in N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$. Il existe donc $z_{\mathfrak{P}} \in \mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$ tel que $\alpha_{\mathfrak{p}} = N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(z_{\mathfrak{P}})$. Écrivons alors $\alpha = N_{L/K}(x)u$ avec $x \in \mathcal{R}_L$ dont toutes les coordonnées valent 1, sauf $x_{\mathfrak{P}}$ pour $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ que nous prenons égal à $z_{\mathfrak{P}}$; et $u \in \mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}})}$ (en fait $u = \alpha$ en dehors de la $\mathfrak{p}$-ième composante que l'on prend égale à 1). Alors grâce au théorème d'approximation ℓ-adique, nous pouvons trouver $y \in \mathcal{R}_L$ tel que $\frac{y}{x} \in \mathcal{R}_L^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}})}$ et $y \in \mathcal{R}_L^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$, les modules étant les étendus à L. Ainsi $N_{L/K}(\frac{y}{x}) \in \mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}})}$ et $N_{L/K}(y) \in \mathcal{R}_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$. Par suite, $N_{L/K}(y)$ est un $\mathfrak{p}$-associé de α. Écrivons $\psi(y) = \mathcal{O}\mathcal{U}$ avec $\mathcal{O}$ qui contient les idéaux premiers au dessus de $\mathfrak{p}$ et $\mathcal{U}$ étant premier à $\mathfrak{p}$ i.e $\mathcal{U} \in P\ell_L^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})}$. Ainsi $\psi(N_{L/K}(y)) = N_{L/K}(\psi(y)) = N_{L/K}(\mathcal{O})N_{L/K}(\mathcal{U})$. Il suit alors $\big(\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}}\big) = \big(\widetilde{\frac{L/K}{N_{L/K}(\mathcal{U})}}\big) = 1$ puisque $N_{L/K}P\ell_L^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K})} \subset A\ell_K$.

Réciproquement supposons $\big(\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}}\big) = 1$, et désignons par $X_{\mathfrak{p}}$ l'ensemble des éléments $\alpha \in \mathcal{R}_K$ tels que $\big(\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}}\big) = 1$. Alors nous avons la suite exacte suivante :

$$1 \longrightarrow X_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \mathcal{R}_K \longrightarrow D_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 1$$

où $D_{\mathfrak{p}}$ désigne le sous-groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$. D'après la partie directe, nous savons que $\mathcal{R}_K \cap N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}} \subseteq X_{\mathfrak{p}}$. Or $\frac{\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}}{N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}}$ est isomorphe au groupe de Galois local, et est d'indice $e_{\mathfrak{p}}f_{\mathfrak{p}} = \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}\widetilde{f}_{\mathfrak{p}}$. Or $\frac{\mathcal{R}_{K_{\mathfrak{p}}}}{N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}} \simeq \frac{\mathcal{R}_K}{\mathcal{R}_K \cap N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}}$, par suite nous en déduisons l'égalité $X_{\mathfrak{p}} = \mathcal{R}_K \cap N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}}$. $\square$

Théorème 4.4.2. *Théorème des conducteurs*

Soit L une ℓ-extension abélienne finie de K corps de classes pour la classe de congruences $\mathcal{C}$, alors le conducteur de la classe de congruences $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathcal{C}}$ est égal au conducteur logarithmique de l'extension $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$.

Démonstration. Nous savons déjà que $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathcal{C}}$ et $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ ont les mêmes diviseurs premiers. Supposons qu'ils ne soient pas égaux : alors il existerait $\mathfrak{p}|\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ tel que $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathcal{C}}\mathfrak{p}$ diviserait encore $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ à savoir $n = \frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\mathfrak{p}}$ serait un multiple de $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathcal{C}}$. De ce fait $(n, C) \in \mathcal{C}$ pour un certain sous-module de congruences C. Par suite, nous avons $(n, C) \sim (\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}, A\ell_{L/K})$ et comme n et $\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$ sont divisibles par les mêmes places, il vient : $A\ell_{L/K} = C$ et $P\ell_K^{(n)} \subset A\ell_{L/K}$. Considérons alors un élément α quelconque de $\mathcal{R}_K^{(n)}$, alors α est un $\mathfrak{p}$-associé de lui-même : en effet par construction $\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}|n$. Par suite, $(\widetilde{\frac{\alpha, L/K}{\mathfrak{p}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{\psi(\alpha)}}) = 1$ puisque $\psi(\alpha) \in A\ell_{L/K}$. Cela implique donc d'après la proposition précédente que α serait norme locale en $\mathfrak{p}$, on aurait alors : $\widetilde{\mathcal{U}}_{K_{\mathfrak{p}}}^{v_{\mathfrak{p}}(\widetilde{\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}})} \subseteq N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathcal{R}_{L_{\mathfrak{P}}})$ contradiction par rapport à la définition du conducteur local qui serait $\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}}$ et non $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}$. $\square$

Remarque : Le symbole de Hasse logarithmique permet également, comme dans le cas classique, une description du sous-groupe d'inertie logarithmique associé à une place $\mathfrak{p}$ et une ℓ-extension abélienne finie L/K, celui étant défini comme le sous-groupe du groupe de Galois de l'extension, qui fixe l'extension maximale de K logarithmiquement non ramifiée.

Théorème 4.4.3. *L/K étant une ℓ-extension abélienne finie, la restriction du symbole de Hasse logarithmique aux idèles principaux dont le diviseur logarithmique principal est premier à $\mathfrak{p}$ a pour image le sous-groupe d'inertie logarithmique pour $\mathfrak{p}$ dans L/K.*

Démonstration. Notons $\mathcal{R}_{K,\mathfrak{p}}$ l'ensemble des idèles principaux dont le diviseur logarithmique principal est premier à $\mathfrak{p}$. Si $\alpha \in \mathcal{R}_{K,\mathfrak{p}}$, un $\mathfrak{p}$-associé de α, β a pour image un diviseur logarithmique principal $\psi(\beta)$ premier à $\mathfrak{p}$ puisque $\frac{\beta}{\alpha} \in \mathcal{R}_K^{(\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}})}$, et $(\widetilde{\frac{\alpha, L/K}{\mathfrak{p}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{\psi(\beta)}})$. Désignons par M le corps d'inertie logarithmique et par $I_{\mathfrak{p}}$ le sous-groupe d'inertie logarithmique. Par définition du $\mathfrak{p}$-associé, nous savons que $\beta \in \mathcal{R}_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$, Or $\tilde{\mathfrak{f}}_{M/K}|\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K} = \tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}$, comme $\tilde{\mathfrak{f}}_{M/K}$ est premier avec $\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}$, nous obtenons que $\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}$ est un multiple de $\tilde{\mathfrak{f}}_{M/K}$: ainsi

$(\widetilde{\frac{L/K}{\psi(\beta)}}) = 1$. Réciproquement, supposons que $\sigma \in I_{\mathfrak{p}}$, par la surjectivité du symbole d'Artin logarithmique il existe $b \in D\ell_K^{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}$ tel que $(\widetilde{\frac{L/K}{b}}) = \sigma$. Comme $\sigma \in I_{\mathfrak{p}}$, nous avons $(\widetilde{\frac{M/K}{b}}) = 1$. Finalement, $b \in A\ell_{L/K,\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}} \subset A\ell_{L/K,\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}}}$. Par le lemme précédent, nous savons que $A\ell_{L/K} P\ell_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})} = A\ell_{I/K,(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$: il existe donc $\alpha \in \mathcal{R}_K^{(\frac{\tilde{\mathfrak{f}}_{L/K}}{\tilde{\mathfrak{f}}_{\mathfrak{p}}})}$ et $c \in A\ell_{L/K}$ tels que $b = c\psi(\alpha)$ et α est premier avec $\mathfrak{p}$ car b et c le sont. Ainsi, comme α est son propre $\mathfrak{p}$-associé, nous obtenons : $(\widetilde{\frac{\alpha, L/K}{\mathfrak{p}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{\psi(\alpha)}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{bc^{-1}}}) = (\widetilde{\frac{L/K}{b}}) = \sigma$.

$\square$

5 Glossaire des notations

Dans tout ce qui suit ℓ désigne un nombre premier fixé. Introduisons les notations suivantes

Pour un corps local $K_\mathfrak{p}$ d'idéal maximal $\mathfrak{p}$ et d'uniformisante $\pi_\mathfrak{p}$, nous notons

$\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} = \varprojlim_k K_\mathfrak{p}^\times / K_\mathfrak{p}^{\times \ell^k}$: le ℓ-adifié du groupe multiplicatif du corps local

$\mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}} = \varprojlim_k U_\mathfrak{p} / U_\mathfrak{p}^{\ell^k}$: le ℓ-adifié du groupe des unités $U_\mathfrak{p}$ de $K_\mathfrak{p}$

$U_\mathfrak{p}^1$: le groupe des unités principales de $K_\mathfrak{p}$

$\mu_\mathfrak{p}^0$: le sous-groupe de $U_\mathfrak{p}$, d'ordre fini et premier à $\mathfrak{p}$

$\mu_\mathfrak{p}$: le ℓ-sous-groupe de Sylow de $\mu_\mathfrak{p}^0$

Pour un corps de nombre K, nous définissons

$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_\mathbb{Z} K^\times$: le ℓ-groupe des idèles principaux

$\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K}^{res} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$: le ℓ-groupe des idèles

$\mathcal{U}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}}$: le sous-groupe des unités

$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$: le ℓ-groupe des classes d'idèles

Dans le contexte logarithmique, nous posons

$\hat{\mathbb{Q}}_\mathfrak{p}^c$: la $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$

$\mathbb{Q}_p^c$: la $\mathbb{Z}_\ell$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$

$\tilde{v}_\mathfrak{p}$: la valuation logarithmique associée à $\mathfrak{p}$ sur $\mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}}$

$\widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}} = \operatorname{Ker}(\tilde{v}_\mathfrak{p})$: le sous groupe des unités logarithmiques locales

$\widetilde{\mathcal{U}}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl_K} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$: le sous-groupe des unités logarithmiques

$\tilde{e}_\mathfrak{p} = [K_\mathfrak{p} : \hat{\mathbb{Q}}_\mathfrak{p}^c \cap K_\mathfrak{p}]$: l'indice absolu de ramification logarithmique de $\mathfrak{p}$

$\tilde{f}_\mathfrak{p} = [\hat{\mathbb{Q}}_\mathfrak{p}^c \cap K_\mathfrak{p} : \mathbb{Q}_\mathfrak{p}]$: le degré absolu d'inertie logarithmique de $\mathfrak{p}$

$\tilde{e}_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} = [L_\mathfrak{P} : \hat{K}_\mathfrak{p}^c \cap L_\mathfrak{P}]$: l'indice relatif de ramification logarithmique de $\mathfrak{p}$

$\tilde{f}_{L_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}} = [\widehat{K_\mathfrak{p}^c} \cap L_\mathfrak{P} : K_\mathfrak{p}]$: le degré relatif d'inertie logarithmique de $\mathfrak{p}$

$\mathcal{J}_K^{(m)} = \prod_{\mathfrak{p}\nmid m} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}|m} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^{v_\mathfrak{p}(m)}$

$\mathcal{J}_K^{m} = \prod_{\mathfrak{p}\nmid m} \mathcal{R}_{K_\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}|m} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}$

$\widetilde{\mathcal{U}}_K^{(m)} = \prod_{\mathfrak{p}\nmid m} \mathcal{U}_{K_\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p}|m} \widetilde{\mathcal{U}}_{K_\mathfrak{p}}^{v_\mathfrak{p}(m)}$

$\mathcal{R}_K^{(m)} = \mathcal{R}_K \cap \mathcal{J}_K^{(m)}$

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{J}_K^m &\longrightarrow D\ell_K^m \\ \alpha = (\alpha_\mathfrak{p}) &\longmapsto \psi(\alpha) = \sum \widetilde{v}_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})\mathfrak{p} \end{aligned}$$

$D\ell_K^m = \psi(\mathcal{J}_K^m)$: diviseurs logarithmiques premiers à m

$P\ell_K^{(m)} = \psi(\mathcal{R}_K^{(m)})$: diviseurs logarithmiques principaux attachés à m

$\widetilde{\mathfrak{f}}_{L/K}$: le conducteur logarithmique global de L/K

$\widetilde{\mathfrak{f}}_\mathfrak{p}$: le conducteur logarithmique local en $\mathfrak{p}$

$(\widetilde{\frac{L/K}{\mathfrak{p}}})$: le Frobenius logarithmique en $\mathfrak{p}$

$A\ell_{L/K}$ le groupe d'Artin logarithmique de L/K

$T\ell_{K,m} = P\ell_K^{(m)} \cdot N_{L/K}(D\ell_L^m))$: le sous-module de Takagi logarithmique associé à m

$(\widetilde{\frac{\alpha,L/K}{\mathfrak{p}}})$: le symbole de Hasse logarithmique

Références

[AT] E. Artin & J. Tate, *Class field theory*, Benjamin, New York, (1967)

[Bo] N. Bourbaki, *Elements de Topologie générale, Algèbre, Chapitres 1 à 4*, Masson, Paris

[Bri] C.Brighi, *Capitulation des classes logarithmiques et étude de certaines tours de corps de nombres*, thèse, Publ. Math. Fac. Sci. Metz, Théor. Nombres (2007), 1–67

[Ca] J.Calais, *Éléments de théorie des anneaux*, Ellipses (2006)

[CF] J.W.S Cassels, A.Fröhlich, *Algebraic number theory*, Academic Press, New-York, (1967)

[D] F.Diaz y Diaz, J.F Jaulent, S.Pauli, M.Pohst, F ;Soriano-Gafiuk, *A new algorithm for the computation of logarithmic ℓ-class groupes of number fields*, Experimentzl Math., **14**, (2005), 67–76.

[Gr1] G.Gras, *Class field theory from theory to practice*, Springer-Verlag, (2003)

[Gr2] G.Gras, *Théorie du corps des classes*, notes de cours prêtées par Monsieur Jaulent

[Jan] G.J Janusz, *Algebraic number fields*, American Mathematical Society, Second edition, (1996)

[Ja0] J.-F Jaulent, *L'arithmétique des ℓ-extensions (thèse d'état)*, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Théor. Nombres, (1986), 1–348.

[Ja1] J.-F. Jaulent, *Théorie ℓ-adique du corps des classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **10**, fasc.2 (1998), 355–397.

[Ja2] J.-F Jaulent, *Sur l'indépendance ℓ-adique de nombres algébriques*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **20**, fasc.2, (1985)

[Ja3] J.-F Jaulent, *Classes logarithmiques d'un corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux, **6**, (1994), 301–325.

[Ja4] J.-F Jaulent, *Sur le noyau sauvage des corps de nombres*, Acta Arithmetica, **67**, (1994), 335–348.

[La1] S. Lang, *Cyclotomic Fields*, Springer Verlag, GTM 59, (1978)

[La2] S. Lang, *Algebraic number theory*, Springer Verlag, GTM 110, (1994)

[M] H.Matsumura, *Commutative algebra*, Second edition, Mathematics Lecture Note Series 56, Masson, (1980)

[Mi] J.S Milne, *Class Field Theory*, http ://www.jmilne.org/math/CourseNotes/, 2008

[Ne1] J. Neukirch, *Class Field Theory*, Springer-Verlag, GTM 280, (1986)

[Ne2] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, GTM 322, (1986)

[Ne3] J. NEUKIRCH, *Microprimes*, Math.Ann, 298, (1994), 629–666

[Re] S.REGLADE, *A formal approach "à la Neukirch" of ℓ-adic class field theory*, submitted

[Sa] SAMUEL, *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, Paris, (1967)

[Sh] S.S. SHATZ, *Profinite groups, arithmetic and geometry*, Princeton university press and university of Tokyo press, (1972)

[Se1] J.P SERRE, *Corps locaux*, Hermann, Paris, (1959)

[Se2] J.P SERRE, *Cours d'arithmétique*, PUF, Paris, (1970)

[Se3] J.P SERRE, A.BOREL, S.CHOWLA, C.S HERZ, K.IWASAWA, *Seminar on complex multiplication*, Lectures Notes in Mathematics, 21, (1966)

[Wa] L. WASHINGTON, *An introduction to Cyclotomic fields*, Springer-Verlag, GTM 83, (1997)

Index